$$\left.\begin{aligned}\vec{x} &= (1,3)\\ \vec{y} &= (-4,4)\end{aligned}\right\}\ \vec{A} = \vec{x}+\vec{y} = (-3,7) \quad \ldots (I)$$

Luego : De (I) y (II) :

$$\vec{A}-\vec{B} = (-1,11)$$

$$|\vec{A}-\vec{B}| = \sqrt{1^2+11^2} = \sqrt{122}$$

$$\vec{\mu} = \frac{\vec{A}-\vec{B}}{|\vec{A}-\vec{B}|} = \frac{(-1,11)}{\sqrt{122}}$$

$$\therefore \boxed{\vec{\mu} = \frac{\sqrt{122}}{122}(-1,11)}$$

Clave: C

PROBLEMA 77 (Sem. CEPRE-UNI 96-II)

Se tiene el paralelogramo *ABCD*.

Si :

$$\vec{AB} = 3\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

$$\vec{AC} = x\hat{i}+2\hat{k}$$

$$\vec{AD} = 2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$$

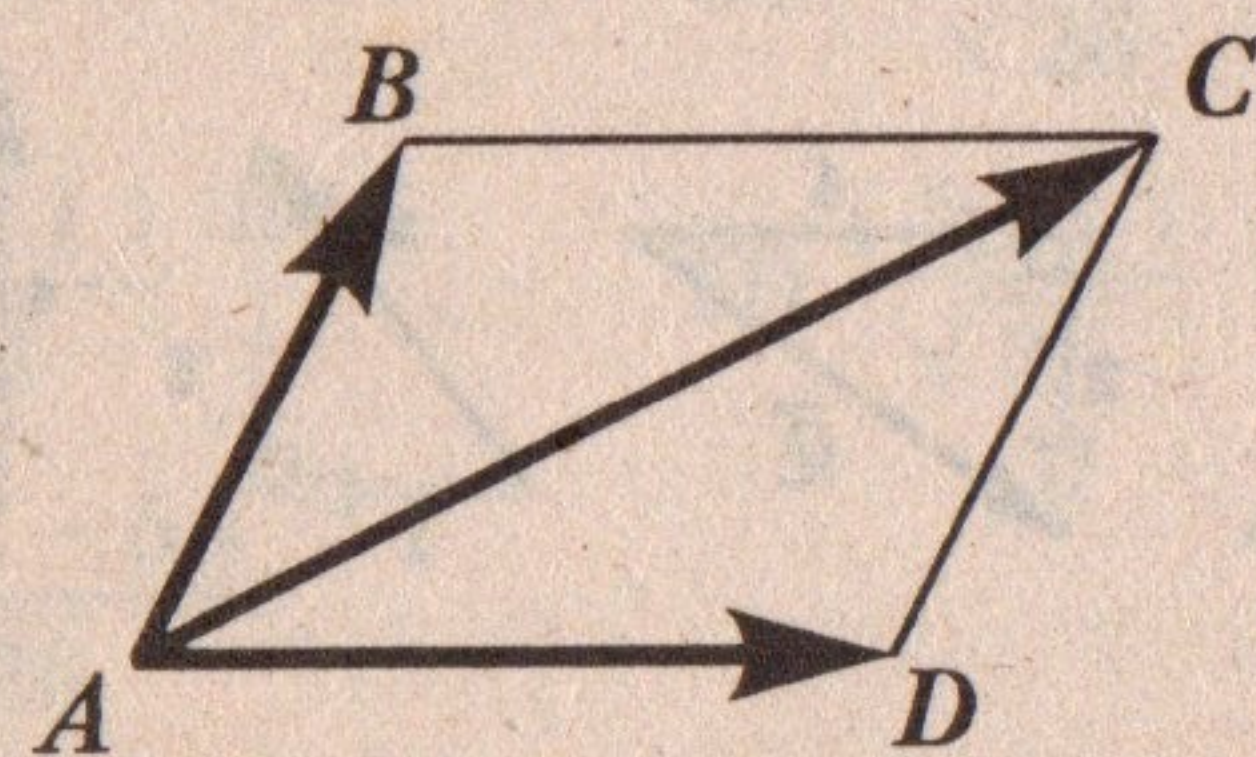
Determine los valores de x , y , z

A) 1 ; 1 ; 2 B) 5 ; 1 ; 1

C) 5 ; 1 ; – 1 D) 5 ; – 1 ; – 1

E) 1 ; 5 ; – 1

RESOLUCIÓN

Bosquejemos :

En la figura :

$$\boxed{\vec{AC} = \vec{AB}+\vec{AD}} \quad \ldots (I)$$

Datos :

$$\vec{AB} = (3,y,z)$$

$$\vec{AC} = (x,0,2)$$

$$\vec{AD} = (2,1,3)$$

Reemplazando en (I) :

$$(x,0,2) = (3,y,z)+(2,1,3)$$

Igualando

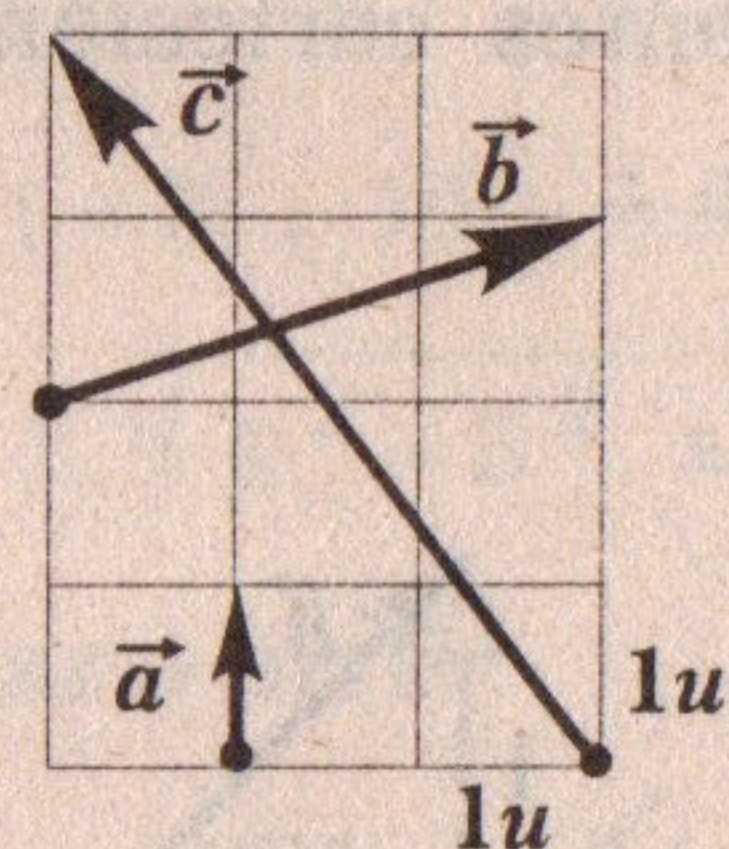
$$x = 3+2 \rightarrow \boxed{x=5}$$

$$0 = y+1 \rightarrow \boxed{y=-1}$$

$$2 = z+3 \rightarrow \boxed{z=-1}$$

Clave: D

PROBLEMA 78

Si la longitud de cada lado del cuadradito es la unidad :

a) Halle las componentes rectangulares de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ respectivamente.

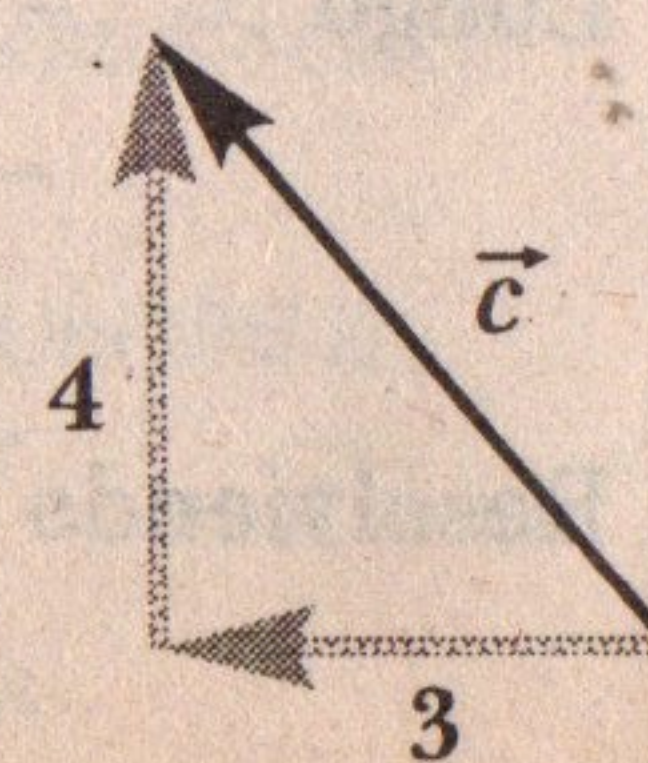
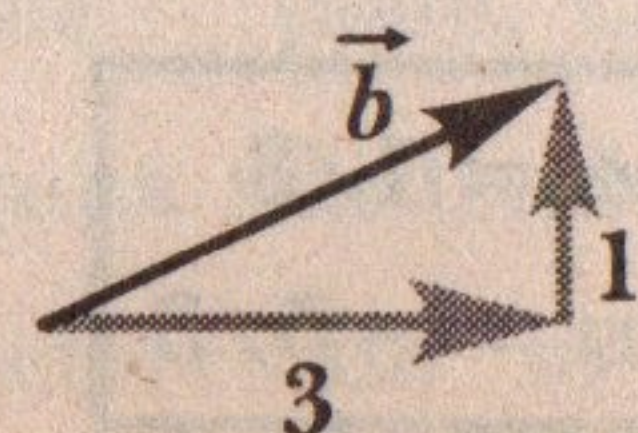
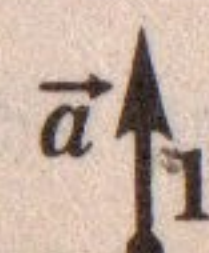
b) Exprese $\vec{c}$ en términos de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es decir haga $\vec{c} = p\vec{a}+q\vec{b}$ y halle p y q escalares.

Dar respuesta a la pregunta *b*).

A) 5 ; – 1 B) 5 ; 1 C) 1 ; 5

D) – 1 ; 5 E) 1 ; – 5

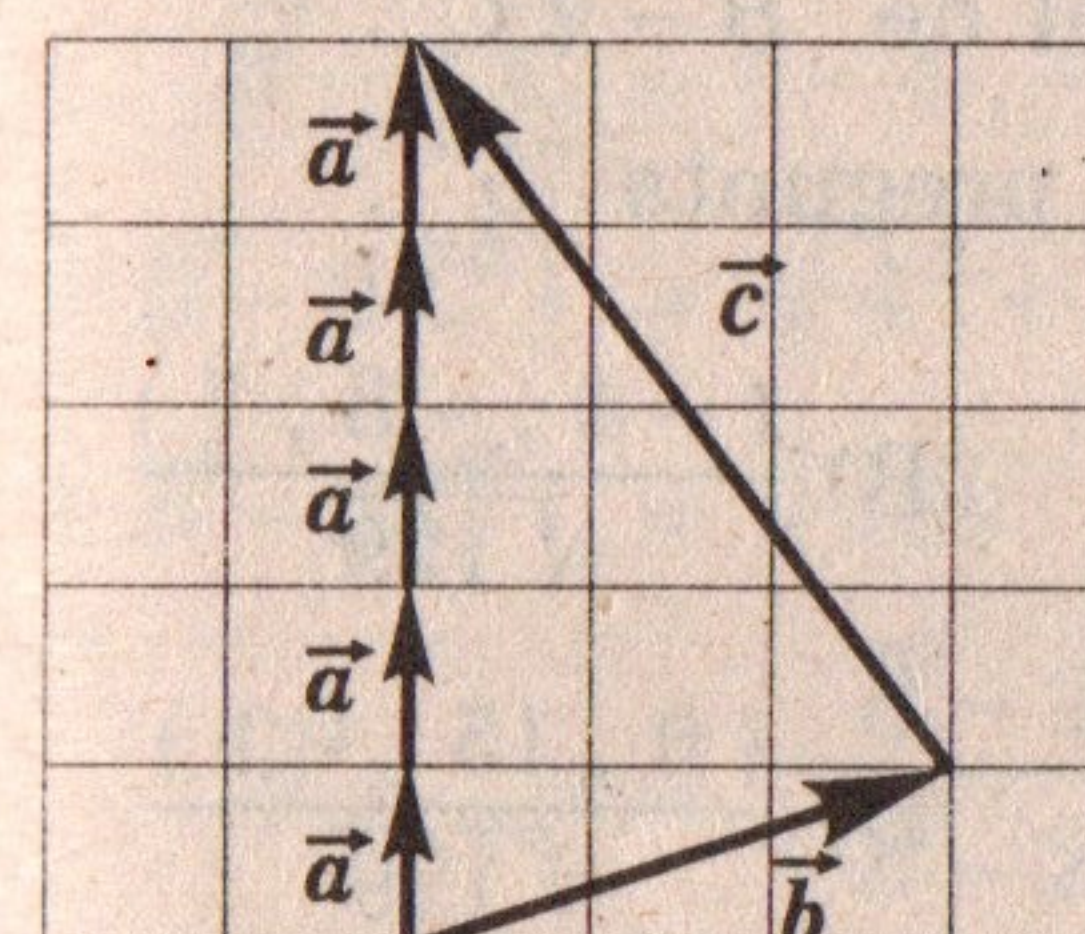
RESOLUCIÓN

a)

Luego :

$$\vec{a} = \hat{j} \ ; \ \vec{b} = 3\hat{i}+\hat{j} \ ; \ \vec{c} = -3\hat{i}+4\hat{j}$$

Finalmente :

$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$a_x = 0$	$b_x = 3$	$c_x = -3$
$a_y = 1$	$b_y = 1$	$c_y = 4$

b) La relación entre los vectores lo haremos por el método gráfico.

Notamos :

$$5\vec{a} = \vec{b}+\vec{c}$$

$$\therefore \vec{c} = 5a-b$$

si $\vec{c} = p\vec{a}+q\vec{b}$ ... dato

Igualando :

$$\boxed{p = 5}$$
$$\boxed{q = -1}$$

Clave.: A

PROBLEMA 79 (Sem. CEPRE-UNI 97-II)

Halle el mayor valor de la componente "x" de la suma de los vectores unitarios paralelos a los siguientes vectores :

$$\vec{A} = 3\hat{i}+4\hat{j} \ , \ \vec{B} = \hat{i}+\sqrt{3}\hat{j}$$

$$\text{y} \quad \vec{C} = \vec{A}-3\vec{B}$$

A) 1,0 B) 1,2 C) 0,55

D) 0,6 E) 1,1

RESOLUCIÓN

Datos :

$$\vec{A} = (3,4)$$

$$\vec{B} = (1,\sqrt{3})$$

$$\vec{C} = \vec{A}-3\vec{B} = (0,4-3\sqrt{3})$$

Calculemos el vector unitario de c/u de ellos :

$$\vec{\mu}_A = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$$

$$\vec{\mu}_B = \frac{\vec{B}}{B} = \frac{(1,\sqrt{3})}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}} = \left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\vec{\mu}_C = \frac{\vec{C}}{C} = \frac{(0,4-3\sqrt{3})}{(4-3\sqrt{3})} = (0,1)$$

Luego :

$$\vec{P} = \vec{\mu}_A+\vec{\mu}_B+\vec{\mu}_C$$

Reemplazando sus valores y sumando los pares ordenados, obtenemos

$$\vec{P} = \left(\frac{11}{10},\frac{9}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Como las componentes de "$\vec{P}$" no dependen de ninguna variable, el máximo valor de la componente en "x" será :

$$\boxed{P_x = \frac{11}{10} = 1{,}1}$$

Clave: E

PROBLEMA 80 (Seminario Cepre-UNI)

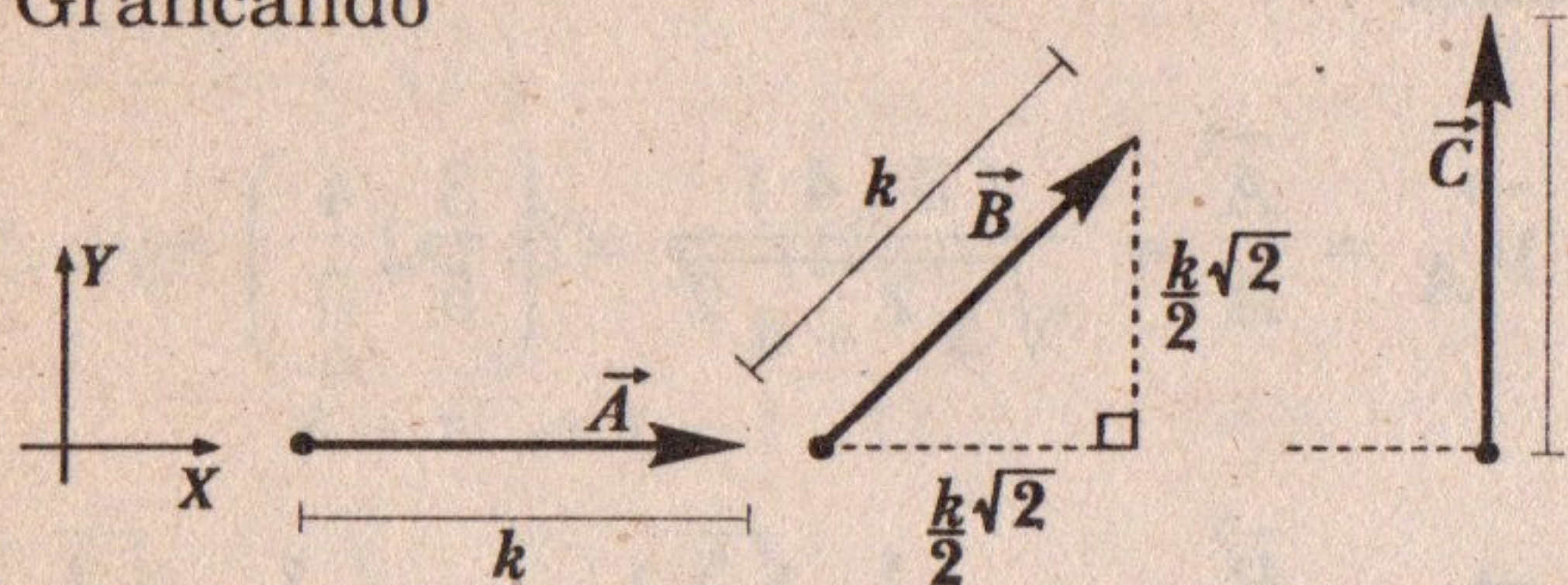
En el plano *XY* se tienen 3 vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ de igual módulo que forman con el eje "*X*" ángulos de 0°, 45° y 90°, respectivamente.

Calcule la medida del ángulo que forma $\vec{A}+\vec{B}-\vec{C}$ con el eje "*X*".

A) 350,26° B) 30° C) 240°

D) 45° E) $\frac{53°}{2}$

RESOLUCIÓN

Graficando

Dato : $A = B = C = k$

$$\vec{A} = k\,\hat{i}$$

$$\vec{B} = \frac{k}{2}\sqrt{2}\,\hat{i} + \frac{k}{2}\sqrt{2}\,\hat{j}$$

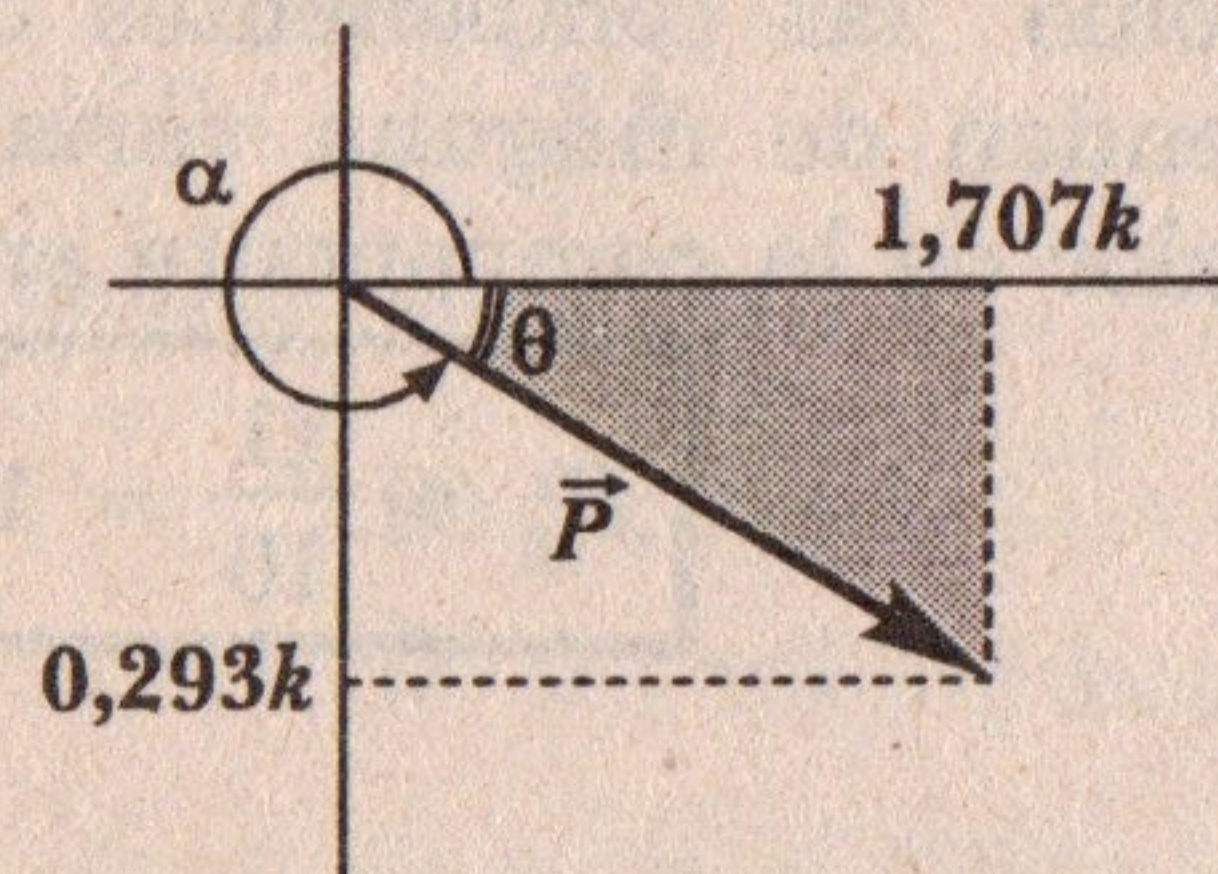
$$\vec{C} = k\,\hat{j}$$

Luego :

$\vec{P} = \vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$ será :

$$\vec{P} = k\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\hat{i} + k\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\hat{j}$$

$$\vec{P} = 1{,}707\,k\,\hat{i} - 0{,}293\,k\,\hat{j}$$

Graficando :

$$tg\,\theta = \frac{0{,}293\,k}{1{,}707\,k}$$

$$tg\,\theta = 0{,}17$$

$$\Rightarrow \theta \approx 9{,}74°$$

Luego :

$$\alpha = 360 - \theta$$

$$\therefore \boxed{\alpha = 350{,}26°}$$

Clave: A

PROBLEMA 81

Dados :

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{B} = 7\hat{k}$$

$$\vec{C} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$$

Hallar :

a) El vector unitario de $\vec{A} + \vec{C} - \vec{B}$.

b) La suma de los vectores unitarios de $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ con el de $\vec{B} - 2\vec{C}$.

Dar respuesta a la pregunta "*b*" .

A) $\dfrac{(4,7,8)}{\sqrt{129}}$ B) $\dfrac{(-4,-8,7)}{\sqrt{129}}$

C) $\dfrac{(0,-1,15)}{\sqrt{129}}$ D) $\dfrac{(0,15,-1)}{\sqrt{129}}$

E) $\dfrac{-\hat{i} + 15\,k}{\sqrt{129}}$

RESOLUCIÓN

Datos :

$$\vec{A} = (2,3,1)$$

$$\vec{B} = (0,0,7)$$

$$\vec{C} = (2,4,0)$$

a) Cálculo del vector unitario de :

$$\vec{M} = \vec{A} + \vec{C} - \vec{B}$$

$$\vec{M} = \vec{A} + \vec{C} - \vec{B} = (4,7,-6)$$

$$M = \left|\vec{A} + \vec{C} - \vec{B}\right| = \sqrt{4^2 + 7^2 + 6^2}$$

$$M = |\vec{A} + \vec{C} - \vec{B}| = \sqrt{101}$$

$$\vec{\mu}_M = \frac{\vec{M}}{M} = \frac{(4,7,-6)}{\sqrt{101}}$$

$$\boxed{\vec{\mu}_M = \frac{1}{\sqrt{101}}(4\hat{i} + 7\hat{j} - 6\hat{k})}$$

b) $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (4,7,8)$

$$|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}| = \sqrt{4^2 + 7^2 + 8^2}$$

$$|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}| = \sqrt{129}$$

$$\vec{\mu}_{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}} = \frac{(4,7,8)}{\sqrt{129}}$$

$$\vec{B} - 2\vec{C} = (-4,-8,7)$$

$$|\vec{B} - 2\vec{C}| = \sqrt{4^2 + 8^2 + 7^2}$$

$$|\vec{B} - 2\vec{C}| = \sqrt{129}$$

$$\vec{\mu}_{\vec{B}-2\vec{C}} = \frac{\vec{B} - 2\vec{C}}{|\vec{B} - 2\vec{C}|}$$

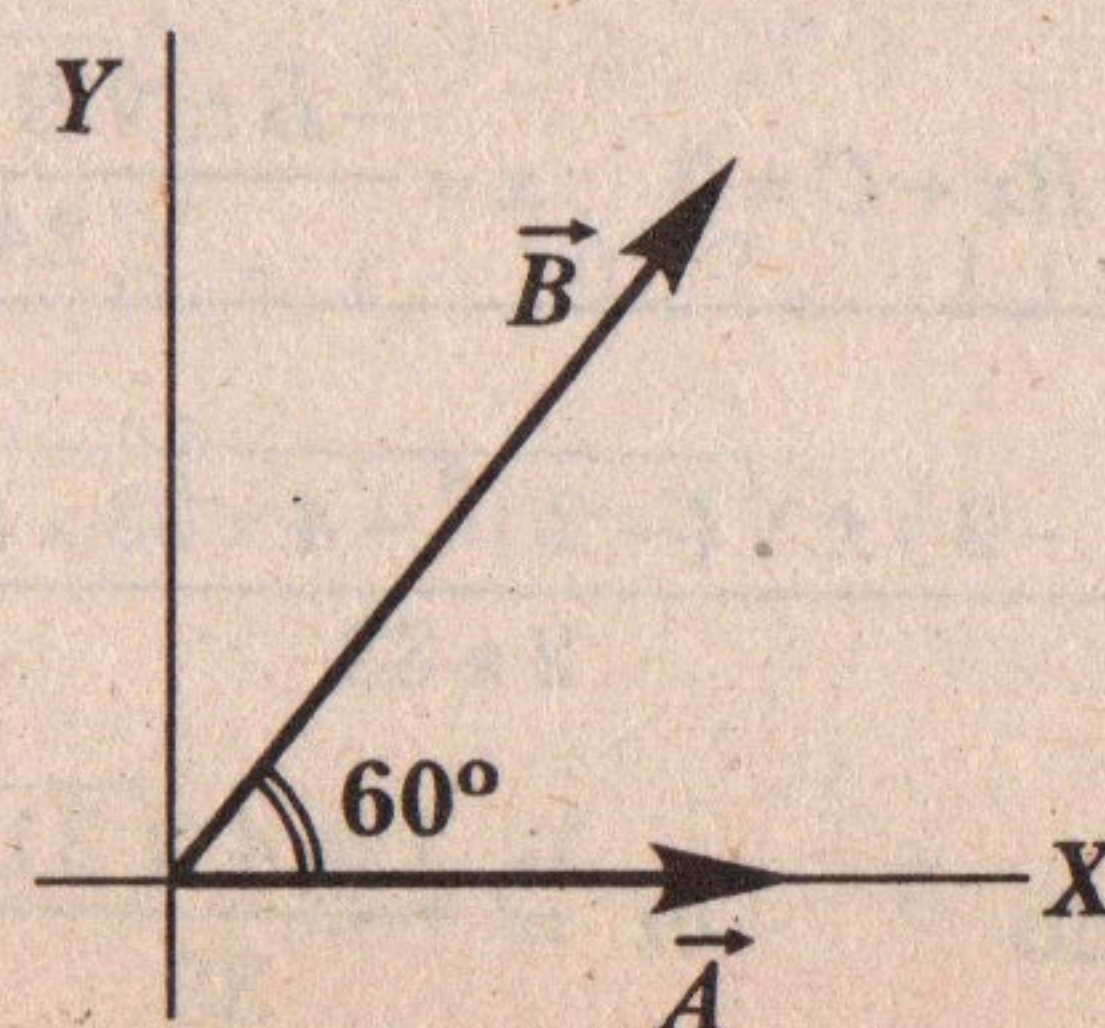
$$\vec{\mu}_{\vec{B}-2\vec{C}} = \frac{(-4,-8,7)}{\sqrt{129}}$$

Luego :

$$\boxed{\vec{\mu}_{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}} + \vec{\mu}_{\vec{B}-2\vec{C}} = \frac{(0,-1,15)}{\sqrt{129}}}$$

Clave: C

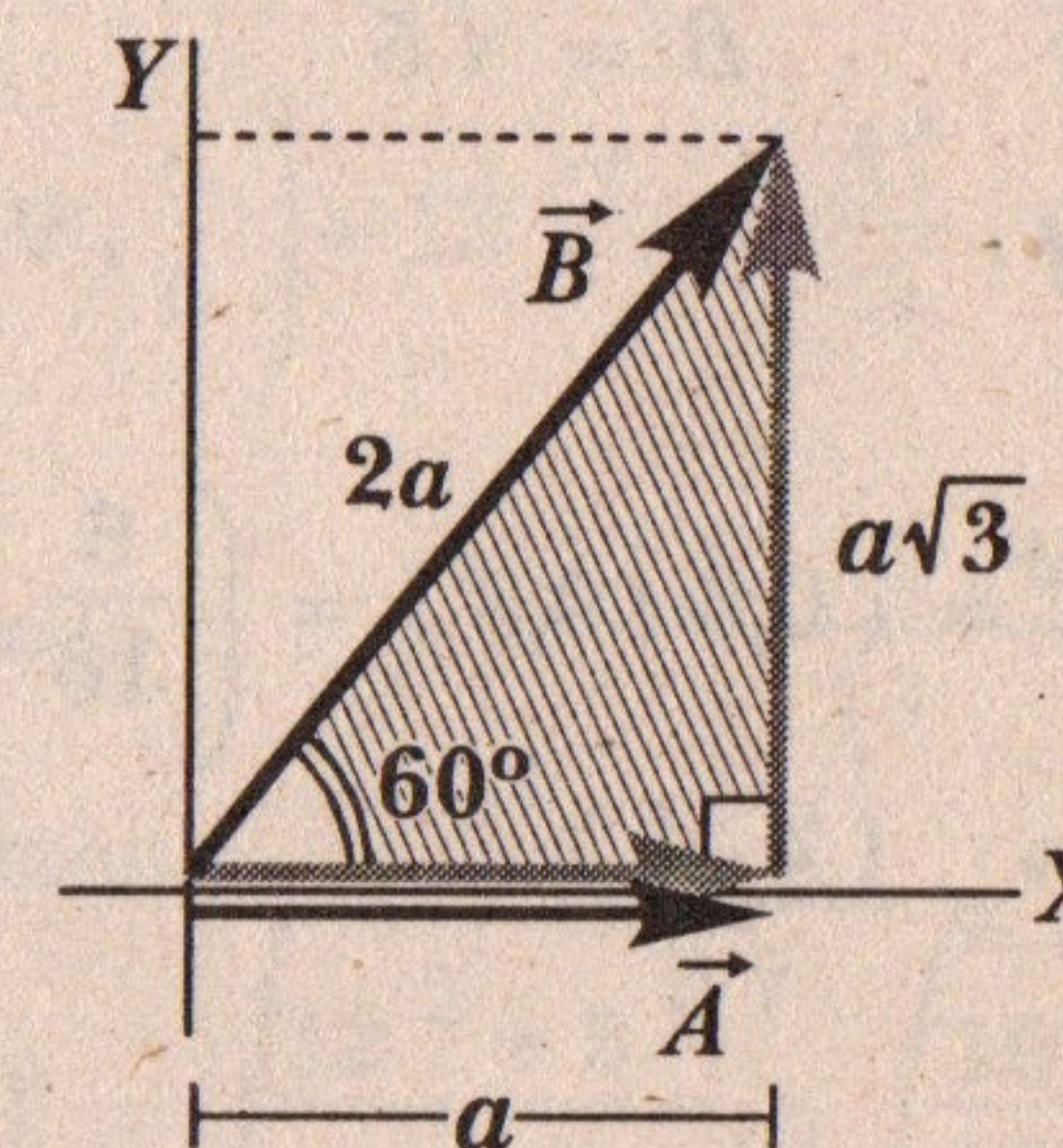
PROBLEMA 82 (Sem. CEPRE-UNI 2000-I)

Si $\vec{A} = a\,\hat{i}$ y $B = 2a$, encontrar un vector unitario antiparalelo a la resultante de ambos vectores.

A) $\dfrac{-2\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{5}}$ B) $\dfrac{-(2\hat{i} - \sqrt{3}\,\hat{j})}{\sqrt{7}}$

C) $\dfrac{-\hat{i} + \sqrt{3}\,\hat{j}}{2}$ D) $\dfrac{-(2,\sqrt{3})}{\sqrt{7}}$

E) $\dfrac{(2,\sqrt{3})}{\sqrt{7}}$

RESOLUCIÓN

Para facilitar la solución descomponemos $\vec{B}$.

Si $\vec{A} = a\,\hat{i}$

$$\vec{B} = a\,\hat{i} + a\sqrt{3}\,\hat{j}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = 2a\,\hat{i} + a\sqrt{3}\,\hat{j}$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = a\sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = a\sqrt{7}$$

$$\vec{\mu}_{\vec{A}+\vec{B}} = \frac{(2a, a\sqrt{3})}{a\sqrt{7}}$$

$$\vec{\mu}_{\vec{A}+\vec{B}} = \frac{(2,\sqrt{3})}{\sqrt{7}}$$

Su vector antiparalelo será : $-\vec{\mu}_{\vec{A}+\vec{B}}$

Luego :

$$\boxed{\vec{\mu}_{antiparalelo} = \frac{-(2,\sqrt{3})}{\sqrt{7}}}$$

Clave: D

PROBLEMA 83 (Sem. CEPRE-UNI 2000-I)

Si: $\vec{a}=0{,}6\,\hat{i}+0{,}8\,\hat{j}$ y $\vec{b}=(2\,\hat{i}+\hat{j})/\sqrt{5}$ son los vectores unitarios de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ respectivamente. Hállese las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, si $\vec{A}+\vec{B}=5\,\hat{i}+5\,\hat{j}$

A) $A=5$, $B=5$ B) $A=\sqrt{5}$, $B=5$ C) $A=5$, $B=\sqrt{5}$

D) $A=\sqrt{5}$, $B=\sqrt{5}$ E) $A=2\sqrt{5}$, $B=\sqrt{5}$

RESOLUCIÓN

Datos :

$$\vec{\mu}_{\vec{A}}=\vec{a}=(0{,}6\,;0{,}8)=\left(\frac{6}{10},\frac{8}{10}\right)$$

$$\vec{\mu}_{\vec{B}}=\vec{b}=\frac{(2\,,1)}{\sqrt{5}}$$

Por teoría :

$$\vec{A}=A\cdot\vec{\mu}_A$$

$$\vec{A}=A\cdot\vec{a}$$

$$\vec{A}=A\left(\frac{6}{10},\frac{8}{10}\right)$$

$$\vec{B}=B\cdot\vec{\mu}_B$$

$$\vec{B}=B\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Luego :

$$\vec{A}+\vec{B}=\left(\frac{6A}{10}+\frac{2B}{\sqrt{5}}\,,\,\frac{8A}{10}+\frac{B}{\sqrt{5}}\right)$$

Pero :

$$\vec{A}+\vec{B}=5\,\hat{i}+5\,\hat{j}\ \text{... dato}$$

Igualando :

$$\frac{6A}{10}+\frac{2B}{\sqrt{5}}=5 \qquad \text{... (I)}$$

$$\frac{8A}{10}+\frac{B}{\sqrt{5}}=5 \qquad \text{... (II)}$$

Resolviendo de (I) y (II) :

$$\boxed{\begin{array}{l}A=5\\ B=\sqrt{5}\end{array}}$$

Clave: C

PROBLEMA 84 (Sem. CEPRE-UNI 2000-II)

Dado el vector :

$$\vec{A}=m\,\hat{i}-m\,\hat{j}+\frac{1}{4}(m-1)\,\hat{k}$$

si $m\in\mathbb{R}$ y $m<0$. ¿Para que valor de m el vector "$\vec{A}$" es unitario?

A) −1 B) 0,5 C) 0,1

D) 0,36 E) −0,64

RESOLUCIÓN

Si $\vec{A}=m\,\hat{i}-m\,\hat{j}+\frac{1}{4}(m-1)\,\hat{k}$

Si $\vec{A}$ es unitario , entonces : $A=1$

Luego :

$$\sqrt{m^2+m^2+\left(\frac{m-1}{4}\right)^2}=1$$

Desarrollando :

$$2m^2+\frac{m^2-2m+1}{16}=1$$

$$33m^2-2m-15=0$$

Aplicando fórmula de ecuación cuadrática.

$$\boxed{\text{Si}: Ax^2+Bx+C=0\ ;\ x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}}$$

$$m=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times 33\times(-15)}}{2\times 33}$$

Resolviendo : $m=\dfrac{1\pm 4\sqrt{31}}{33}$

$$m_1=\frac{1+4\sqrt{31}}{33}\ ✗$$

$$m_2=\frac{1-4\sqrt{31}}{33}\ ✓ \qquad (m<0)$$

$$\therefore\ \boxed{m_2\approx-0{,}64}$$

Clave: E

PROBLEMA 85 (Sem. CEPRE-UNI 97-II)

Dados los vectores :

$$\vec{A}=3\,\hat{i}+2\,\hat{j}+10\,\hat{k}$$

$$\vec{B}=-10\,\hat{i}+7\,\hat{j}-\hat{k}$$

$$\vec{C}=\hat{i}-9\,\hat{j}-\hat{k}$$

hallar el vector unitario $\vec{\mu}$ si se sabe que el vector unitario $\vec{\mu}_R$ de la resultante de los tres vectores satisface la relación :

$$\vec{\mu}_R+13\,\vec{\mu}=\frac{57}{5}\hat{i}-\frac{21}{5}\hat{k}$$

A) $\dfrac{12\,\hat{i}+5\,\hat{j}}{13}$ B) $\dfrac{12\,\hat{j}+5\,\hat{k}}{13}$

C) $\dfrac{12\,\hat{i}-5\,\hat{j}}{13}$ D) $\dfrac{12\,\hat{i}+5k}{13}$

E) $\dfrac{12\,\hat{i}-5\,\hat{k}}{13}$

RESOLUCIÓN

Datos :

$$\vec{A}=(3\,,2\,,10)$$

$$\vec{B}=(-10\,,7\,,-1)$$

$$\vec{C}=(1\,,-9\,,-1)$$

Luego :

$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(-6\,,0\,,8)$$

$$R=|\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}|=\sqrt{6^2+0^2+8^2}$$

$$R=10$$

$$\vec{\mu}_R=\frac{\vec{R}}{R}=\frac{(-6\,,0\,,8)}{10}=\left(-\frac{3}{5},0,\frac{4}{5}\right)$$

Nos piden "μ" = ??

$$\vec{\mu}_R+13\,\vec{\mu}=\left(\frac{57}{5}\hat{i}-\frac{21}{5}\hat{k}\right)$$

$$\left(-\frac{3}{5},0,\frac{4}{5}\right)+13\,\vec{\mu}=\left(\frac{57}{5};0,\frac{-21}{5}\right)$$

Resolviendo : $\vec{\mu}=\dfrac{(12\,,0\,,5)}{13}$

Observamos :

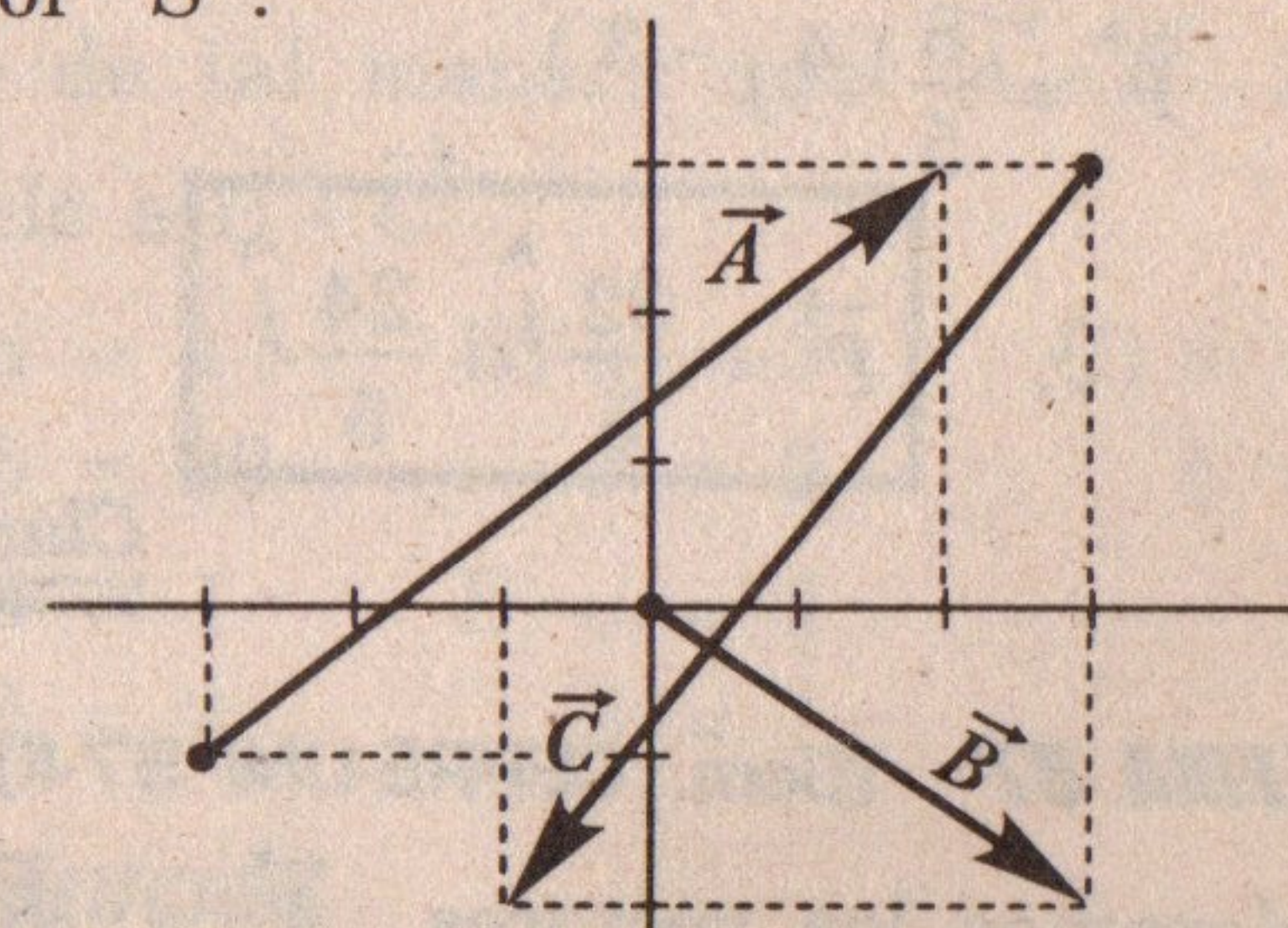
$$|\vec{\mu}|=\sqrt{\frac{12^2+5^2}{13^2}}=\sqrt{\frac{169}{169}}=1$$

∴ ¡Cumple con la condición!

$$\boxed{\mu=\frac{12}{13}\hat{i}+\frac{5}{13}\hat{k}}$$

Clave: E

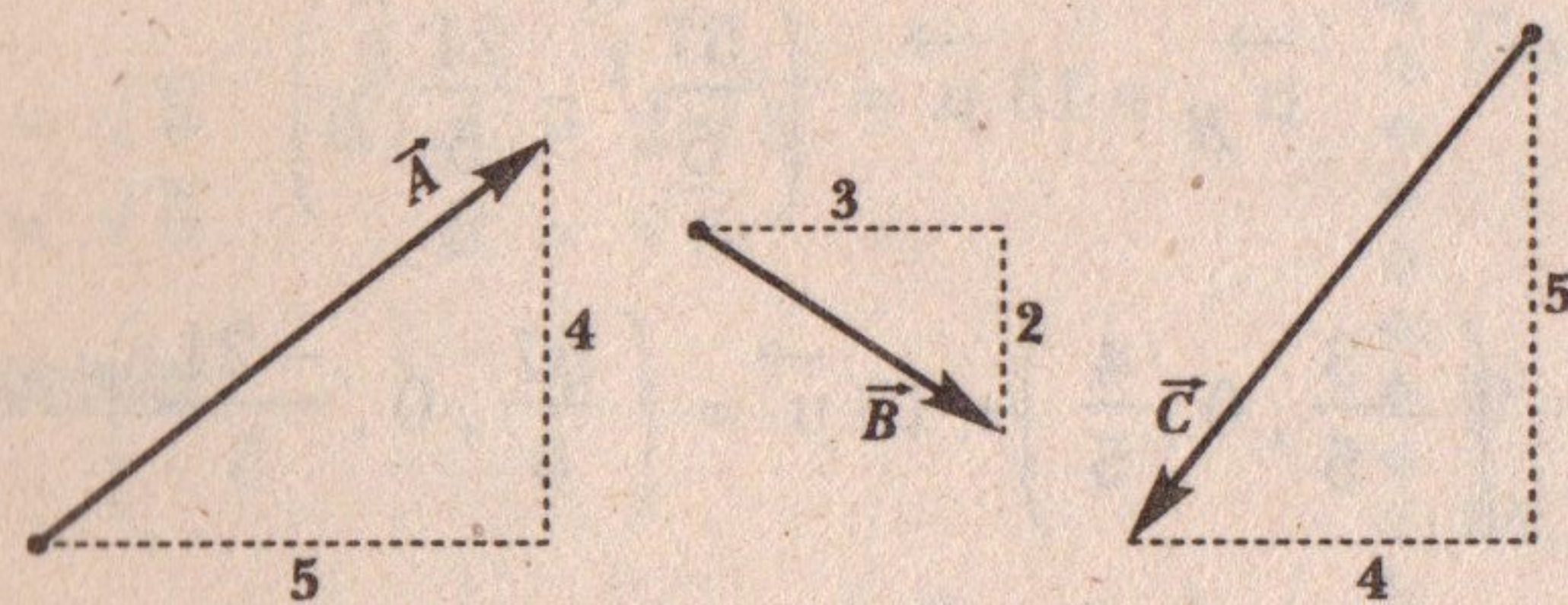
PROBLEMA 86 (Sem. CEPRE-UNI 2000-I)

Si $\vec{S}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$, obtener el vector $\vec{P}$ cuya magnitud es 8 y es paralelo al vector $\vec{S}$.

A) $\dfrac{8}{5}(3\,\hat{i}+4\,\hat{j})$ B) $\dfrac{35}{5}\hat{i}-\dfrac{24}{5}\hat{j}$

C) $\frac{24}{5}\hat{i}-\frac{32}{5}\hat{j}$ D) $\frac{32}{5}\hat{i}-\frac{24}{5}\hat{j}$

E) $\frac{32}{5}\hat{i}+\frac{24}{5}\hat{j}$

RESOLUCIÓN

Calculemos las componentes cartesianas de cada vector.

Luego :

$$\vec{A} = (5,4)$$
$$\vec{B} = (3,-2)$$
$$\vec{C} = (-4,-5)$$

$$\vec{S} = \vec{A}+\vec{B}+\vec{C} = (4,-3)$$

$$|\vec{S}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$

dato :

$$\vec{P} // \vec{S} \Rightarrow \vec{\mu}_P = \vec{\mu}_S \;;\; P = 8$$

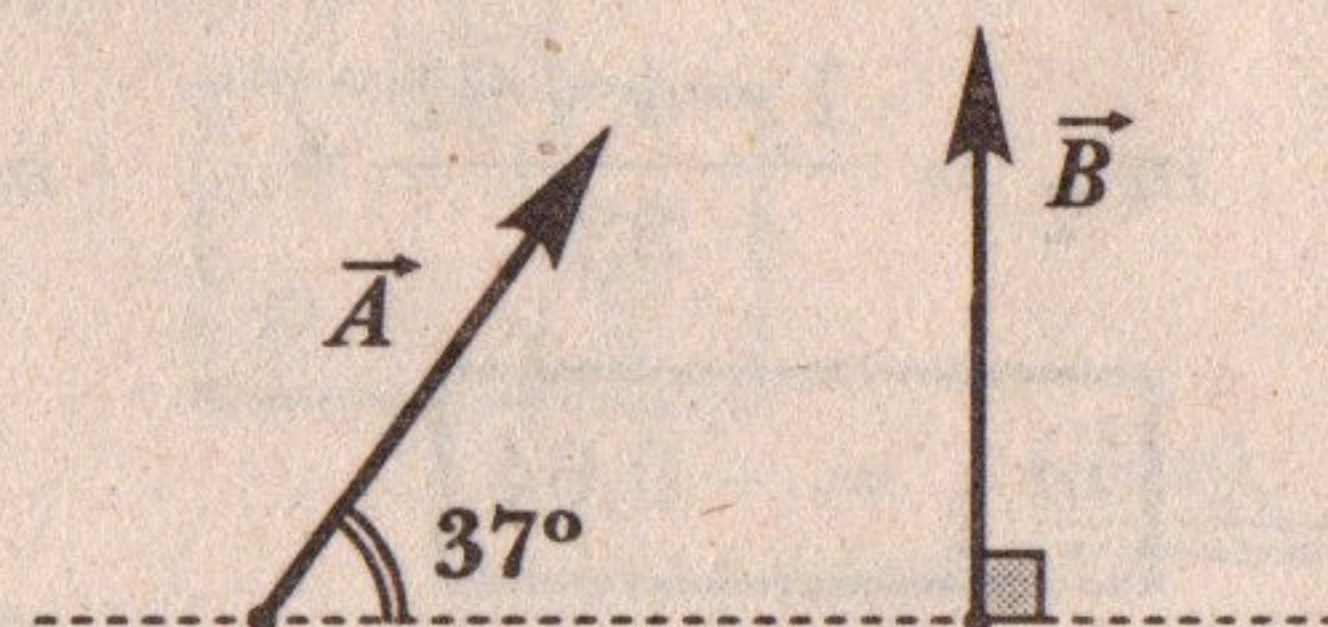
$$\frac{\vec{P}}{P} = \frac{\vec{S}}{S} \Rightarrow \vec{P} = \frac{P}{S}\cdot\vec{S}$$

$$\vec{P} = \frac{8}{5}(4,-3)$$

$$\therefore \boxed{\vec{P} = \frac{32}{5}\hat{i}-\frac{24}{5}\hat{j}}$$

Clave: D

PROBLEMA 87 (Sem. CEPRE-UNI 97-II)

Consideremos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de igual módulo, mostrados en la figura. Halle un vector $\vec{C}$ tal que sea paralelo a la suma del vector $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y cuyo módulo sea $\sqrt{5}$ unidades.

A) $\vec{C} = (2,3)$ B) $\vec{C} = (1,2)$

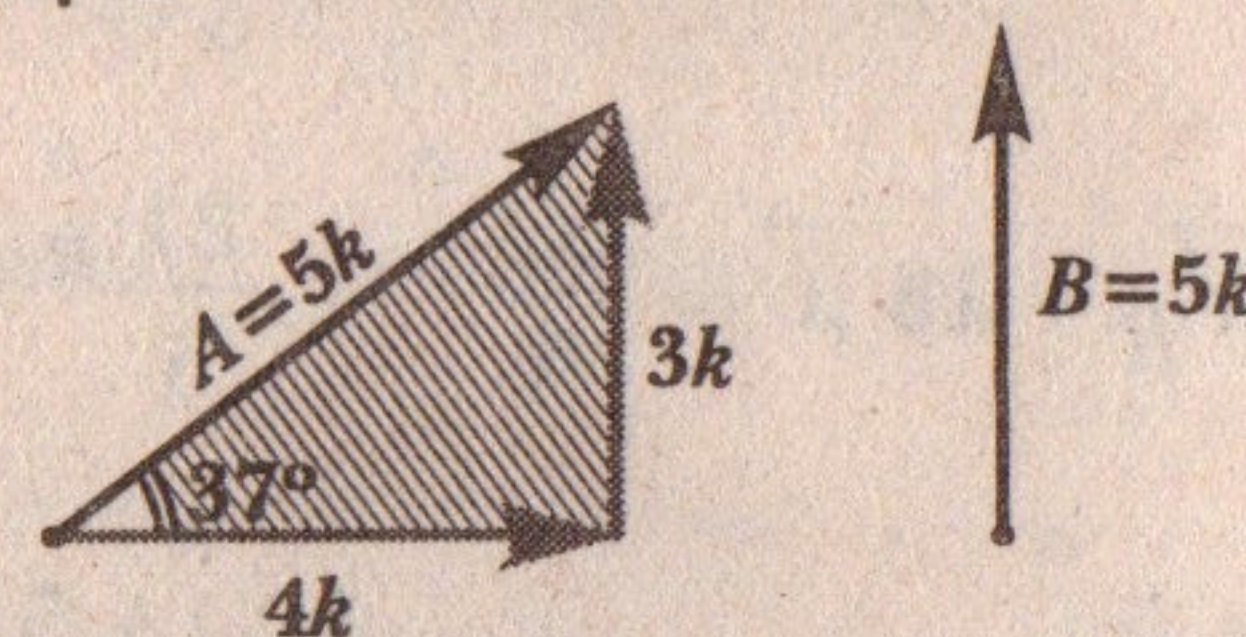
C) $\vec{C} = (2,1)$ D) $\vec{C} = (-1,-2)$

E) $\vec{C} = (-2,1)$

RESOLUCIÓN

Suponemos para facilitar el cálculo :

$$A = B = 5k$$

Hallemos las expresiones vectoriales de $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

$$\vec{A} = 4k\,\hat{i}+3k\,\hat{j}$$
$$\vec{B} = 5k\,\hat{j}$$
$$\vec{A}+\vec{B} = 4k\,\hat{i}+8k\,\hat{j}$$
$$\vec{A}+\vec{B} = 4k(\hat{i}+2\hat{j})$$
$$|\vec{A}+\vec{B}| = 4k\sqrt{1^2+2^2}$$
$$|\vec{A}+\vec{B}| = 4\sqrt{5}\,k$$

Nos piden :

$\vec{C} = ??$; $\vec{C} // \vec{A}+\vec{B}$; $C = \sqrt{5}$ (dato)

Por propiedad :

$$\frac{\vec{C}}{C} = \frac{\vec{A}+\vec{B}}{|\vec{A}+\vec{B}|}$$

$$\vec{C} = \frac{C}{|\vec{A}+\vec{B}|}\cdot(\vec{A}+\vec{B})$$

$$\vec{C} = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{5}\,k}\times 4k(\hat{i}+2\hat{j})$$

$$\vec{C} = (\hat{i}+2\hat{j})$$

$$\therefore \boxed{\vec{C} = (1,2)}$$

Clave: B

PROBLEMA 88 (Sem. CEPRE-UNI 98-I)

Dados los vectores :

$$\vec{A} = 4\hat{i}+6\hat{j}-6\hat{k}$$
$$\vec{B} = 2\hat{i}-4\hat{j}+8\hat{k}$$
$$\vec{C} = -\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$$

Hallar un vector $\vec{D}$ cuya magnitud sea 4 unidades y sea paralelo al vector $2\vec{A}+\vec{B}-6\vec{C}$.

A) $\frac{4\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}}{\sqrt{21}}$ B) $\frac{(4,-1,2)}{4\sqrt{21}}$

C) $\frac{4\sqrt{21}}{21}(4\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})$

D) $\frac{4}{\sqrt{21}}(2\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k})$

E) $\frac{4\sqrt{21}}{21}(4\hat{j}-\hat{i}+2\hat{k})$

RESOLUCIÓN

Datos :

$$\vec{A} = (4,6,-6)$$
$$\vec{B} = (2,-4,8)$$
$$\vec{C} = (-1,2,-2)$$

Hallemos :

$$\vec{R} = 2\vec{A}+\vec{B}-6\vec{C}$$

$$\vec{R} = 2(4,6,-6)+(2,-4,8)-6(-1,2,-2)$$

Resolviendo :

$$\vec{R} = (16,-4,8)$$
$$\vec{R} = 4(4,-1,2)$$
$$R = 4\sqrt{4^2+1^2+2^2}$$
$$R = 4\sqrt{21}$$

Nos piden :

$\vec{D}$; $D = 4$; $\vec{D} // \vec{R} = 2\vec{A}+\vec{B}-6\vec{C}$

Luego :

$$\frac{\vec{D}}{D} = \frac{\vec{R}}{R} \Rightarrow \vec{D} = \frac{D}{R}\cdot\vec{R}$$

$$\vec{D} = \frac{4}{4\sqrt{21}}\cdot[4(4,-1,2)]$$

$$\vec{D} = \frac{4\sqrt{21}}{21}(4,-1,2)$$

$$\therefore \boxed{\vec{D} = \frac{4\sqrt{21}}{21}(4\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})}$$

Clave: C

PROBLEMA 89

Se tienen los vectores $\vec{A} = 3\hat{i}+2\hat{j}$, $\vec{B} = -2\hat{i}+4\hat{j}$, $\vec{C} = a\hat{i}+b\hat{j}$. ¿Cuáles son los valores mínimos y enteros de a y b de tal manera que $\vec{A}+\vec{B}$ sea paralelo a $\vec{B}+\vec{C}$.

A) $a = 4$, $b = 20$ B) $a = 3$, $b = 2$ C) $a = 2$, $b = 3$

D) $a = 1$, $b = 2$ E) $a = 2$, $b = 1$

RESOLUCIÓN

Datos :

$$\vec{A} = (3,2)$$

$\vec{B} = (-2, 4)$

$\vec{C} = (a, b)$

Hallar "a" y "b" mínimos. Si :

$$\vec{A} + \vec{B} // \vec{B} + \vec{C}$$

Por teoría :

$$\vec{B} + \vec{C} // \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow \vec{B} + \vec{C} = k(\vec{A} + \vec{B})$$

k : # real

Reemplazando :

$$\vec{B} + \vec{C} = (-2 + a, 4 + b)$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (1, 6)$$

$$(-2 + a, 4 + b) = k(1, 6) = (k, 6k)$$

Resolviendo :

$$-2 + a = k \Rightarrow a = k + 2$$

$$4 + b = 6k \Rightarrow b = 6k - 4$$

Serán mínimos si k es mínimo y entero.

$$\Rightarrow k = 1$$

$$a = 1 + 2 = 3$$

$$b = 6 - 4 = 2$$

$$\therefore \boxed{a = 3} \quad \boxed{b = 2}$$

Clave: B

PROBLEMA 90 (Sem. CEPRE-UNI 99-II)

Sean los vectores :

$\vec{A} = (t + 1)\hat{i} + 2t\hat{j}$ y

$\vec{B} = (1 - t)\hat{i} + (t/2)\hat{j}$

donde $t \geq 0$. Los valores de "t" para que se cumpla que :

I) $\vec{A} + \vec{B} = C\hat{i}$

II) $A = B$

III) $\vec{A} // \vec{B}$

IV) $\mu_{\vec{A} - \vec{B}} = \frac{1}{5}(4\hat{i} + 3\hat{j})$

Son :

I) $t = 0$ II) $t = 0$

III) $t = \frac{3}{5}$ IV) t : cualquier # real

A) Sólo I , es correcto

B) Sólo I , II y IV son correctos

C) Sólo I, II y III son correctos

D) Todos son correctos

E) Ninguna es correcta

RESOLUCIÓN

Datos : $\vec{A} = (t + 1, 2t)$

$\vec{B} = (1 - t, t/2)$; $t \geq 0$

$t = ??$ si :

I) $\vec{A} + \vec{B} = C\hat{i}$

En los datos y sumando :

$$(2, 2t + \frac{t}{2}) = (C, 0)$$

$$(2, \frac{5}{2}t) = (C, 0)$$

Igualando : $\frac{5}{2}t = 0 \Rightarrow \boxed{t = 0}$

II) $|\vec{A}| = |\vec{B}|$

Reemplazando :

$$\sqrt{(t+1)^2 + (2t)^2} = \sqrt{(1-t)^2 + (t/2)^2}$$

Resolviendo

$$t^2 + 2t + 1 + 4t^2 = 1 - 2t + t^2 + t^2/4$$

$$\frac{15}{4}t^2 + 4t = 0$$

$$t\left(\frac{15}{4}t + 4\right) = 0 \quad \begin{cases} \boxed{t = 0} \ ✓ \\ t = -\frac{16}{15} \ \times \end{cases}$$

III) $\vec{A} // \vec{B} \Rightarrow \vec{A} = k\vec{B}$

$$(t + 1, 2t) = k(1 - t, t/2)$$

$$* \quad t + 1 = k(1 - t)$$

$$\Rightarrow t + 1 = k - kt \quad \ldots (\alpha)$$

$$* \quad 2\not{t} = \frac{k\not{t}}{2} \Rightarrow 2 = \frac{k}{2}$$

$$\therefore k = 4$$

Reemplazando el valor de k en (α) :

$$t + 1 = 4 - 4t$$

$$\therefore \boxed{t = 3/5}$$

IV) $\mu_{\vec{A} - \vec{B}} = \frac{4}{5}\hat{i} + \frac{3}{5}\hat{j} = \frac{(4,3)}{5}$ ...(1)

$$\vec{A} - \vec{B} = (2t, \frac{3}{2}t) = \left(\frac{4t, 3t}{2}\right)$$

$$\vec{A} - \vec{B} = \frac{t}{2}(4, 3)$$

Hacemos un artificio :

$$\vec{A} - \vec{B} = \frac{t}{2} \times \frac{5}{5}(4, 3)$$

$$\vec{A} - \vec{B} = \left(\frac{5t}{2}\right)\left(\frac{4,3}{5}\right) \quad \ldots(2)$$

Pero :

$$\vec{A} - \vec{B} = |\vec{A} - \vec{B}|\, \mu_{\vec{A} - \vec{B}}$$

Reconociendo de (1) en (2) :

$$\vec{A} - \vec{B} = \underbrace{\left(\frac{5t}{2}\right)}_{|\vec{A} - \vec{B}|}\left(\frac{4,3}{5}\right)$$

$$\therefore |\vec{A} - \vec{B}| = \frac{5t}{2}$$

Observamos que para cualquier valor de "t" cumplirá con la condición.

$\therefore$ "t" cualquier número real.

Clave: D

PROBLEMA 91

El vector $\vec{C} = 5\hat{i} + 3\hat{j}$ se descompone en dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, paralelos a los vectores $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j}$ y $\vec{b} = \hat{i} + 5\hat{j}$, respectivamente. Halle las magnitudes de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

A) $A = 2\sqrt{5}$, $B = \sqrt{26}$

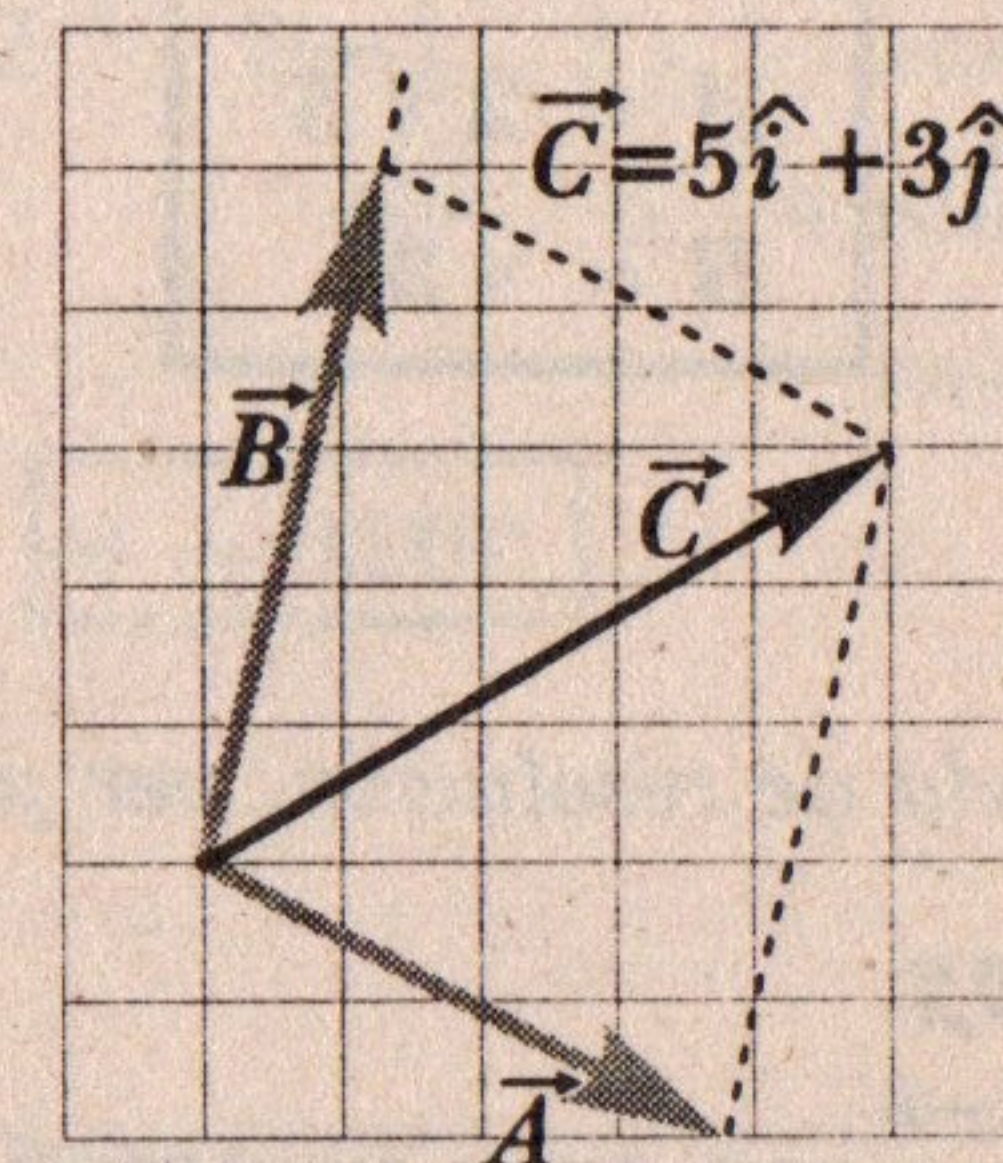
B) $A = \sqrt{5}$, $B = \sqrt{13}$

C) $A = \sqrt{5}$, $B = \sqrt{26}$

D) $A = 2\sqrt{5}$, $B = 2\sqrt{26}$

E) $A = \sqrt{6}$, $B = \sqrt{24}$

RESOLUCIÓN

$\vec{C} = 5\hat{i} + 3\hat{j}$

Según los datos, $\vec{C}$ se descompone en dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

$$\vec{A} // 2\hat{i} - \hat{j} = (2, -1)$$

$$\vec{A} = m(2, -1) \quad \ldots (I)$$

También :

$$\vec{B} // \hat{i} + 5\hat{j} = (1, 5)$$

$$\vec{B} = n(1, 5) \quad \ldots \text{(II)}$$

Pero : $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

$$(5, 3) = m(2, -1) + n(1, 5)$$

$$(5, 3) = (2m + n, -m + 5n)$$

Igualando : $2m + n = 5$

$$-m + 5n = 3$$

Resolviendo : $m = 2$

$$n = 1$$

Reemplazando en (I) y (II) :

$$\vec{A} = 2(2, -1) = (4, -2)$$

$$\vec{B} = 1(1, 5) = (1, 5)$$

Luego :

$$A = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$B = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

$$\therefore \boxed{A = 2\sqrt{5} \quad B = \sqrt{26}}$$

Clave: A

Nota:

otro método de resolución, ver prob. 93

PROBLEMA 92

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ son tres vectores unitarios y además $\vec{v} + \sqrt{3}\,\vec{\mu} + 2\,\vec{w} = \vec{0}$ entonces el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es :

A) 0° B) 30° C) 45°

D) 60° E) 120°

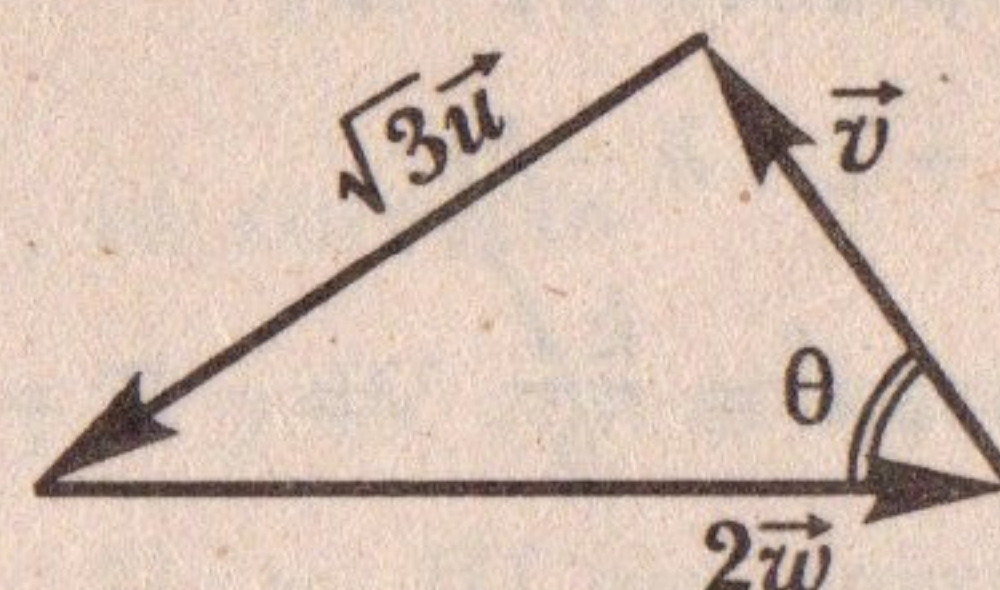
RESOLUCIÓN

Dato : $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ son unitarios

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1$$

Además : $\vec{v} + \sqrt{3}\,\vec{u} + 2\,\vec{w} = \vec{0}$

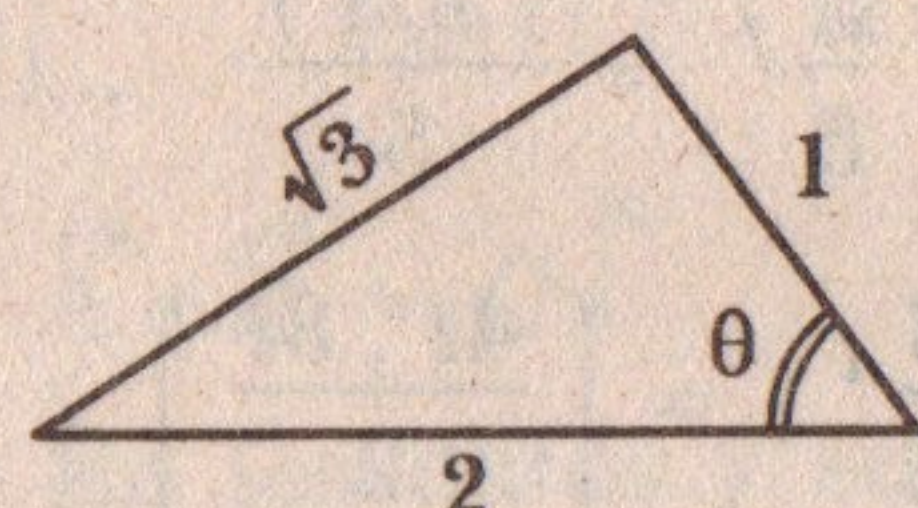
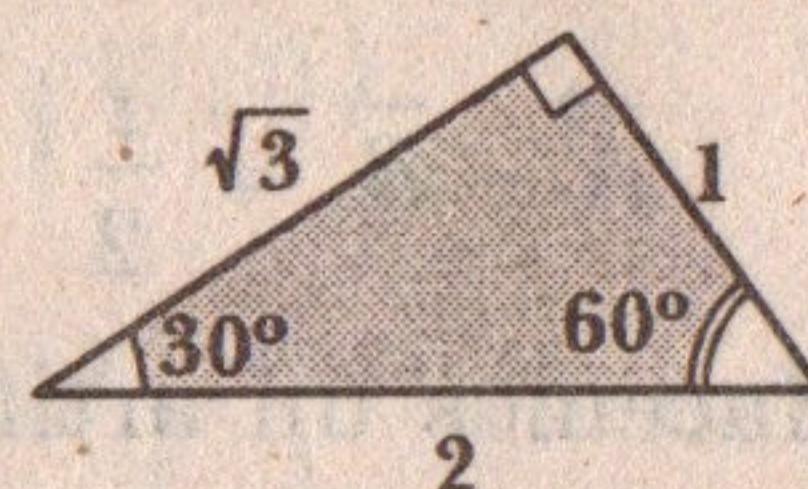
Similar a : $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$

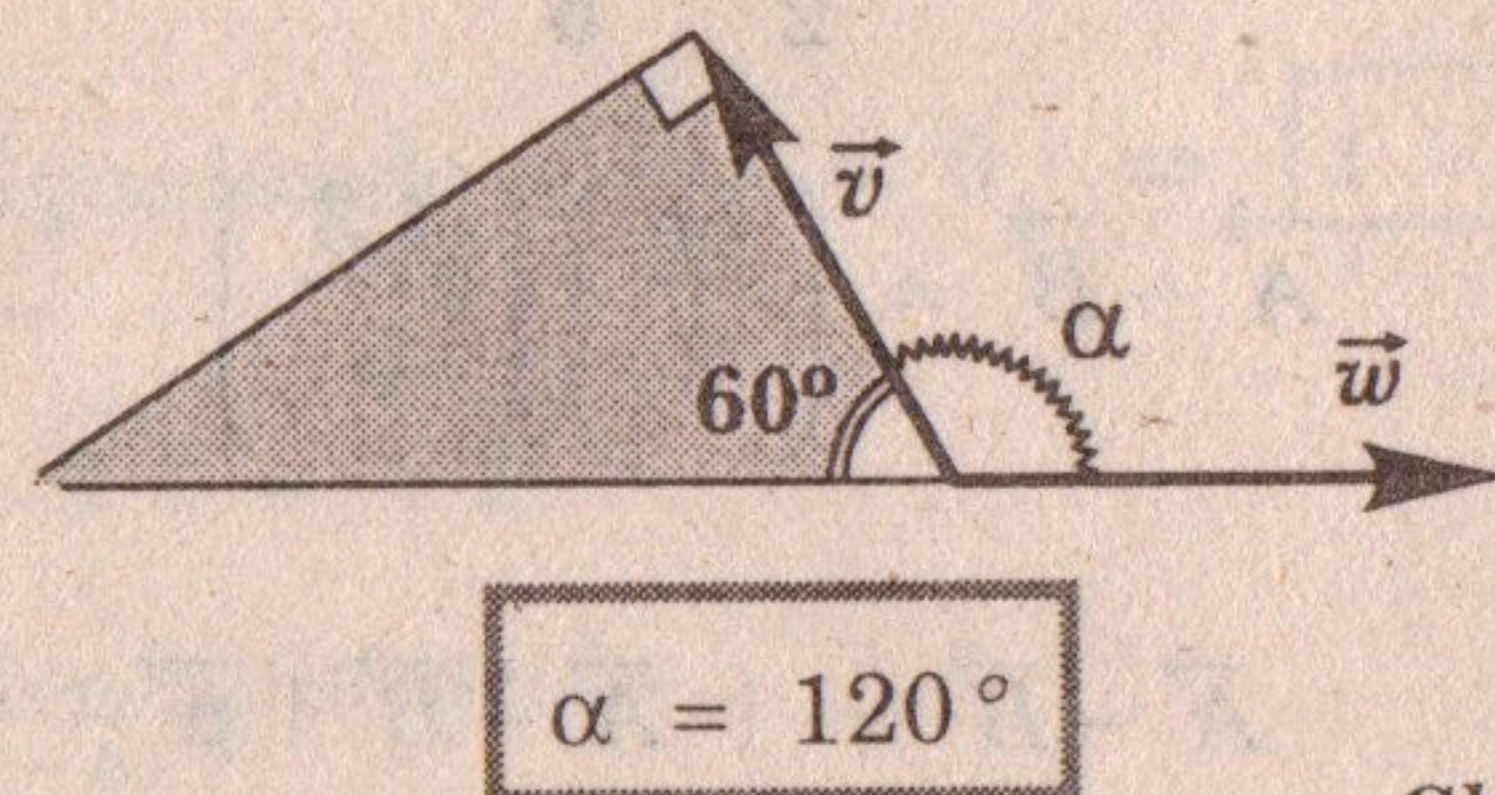
Significa que forman un triángulo cerrado.

Si tomamos el módulo a cada lado del triángulo :

$$|\sqrt{3}\,\vec{\mu}| = \sqrt{3}$$

$$|\vec{v}| = 1$$

$$|2\,\vec{w}| = 2$$

Al redibujar el triángulo.

Notamos que los lados del Δ son semejantes a un ◺ notable

El ángulo entre $\vec{v}$ y "$\vec{w}$" será :

$$\boxed{\alpha = 120°}$$

Clave.: E

Nota:

Otro método de resolución, ver prob. 94

PROBLEMA 93

El vector $\vec{c} = 5\hat{i} + 3\hat{j}$ se descompone en dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ paralelos a los vectores $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j}$ y $\vec{b} = \hat{i} + 5\hat{j}$ respectivamente. Halle las magnitudes de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

A) $2\sqrt{5}$; $\sqrt{26}$ B) $\sqrt{5}$; $\sqrt{13}$

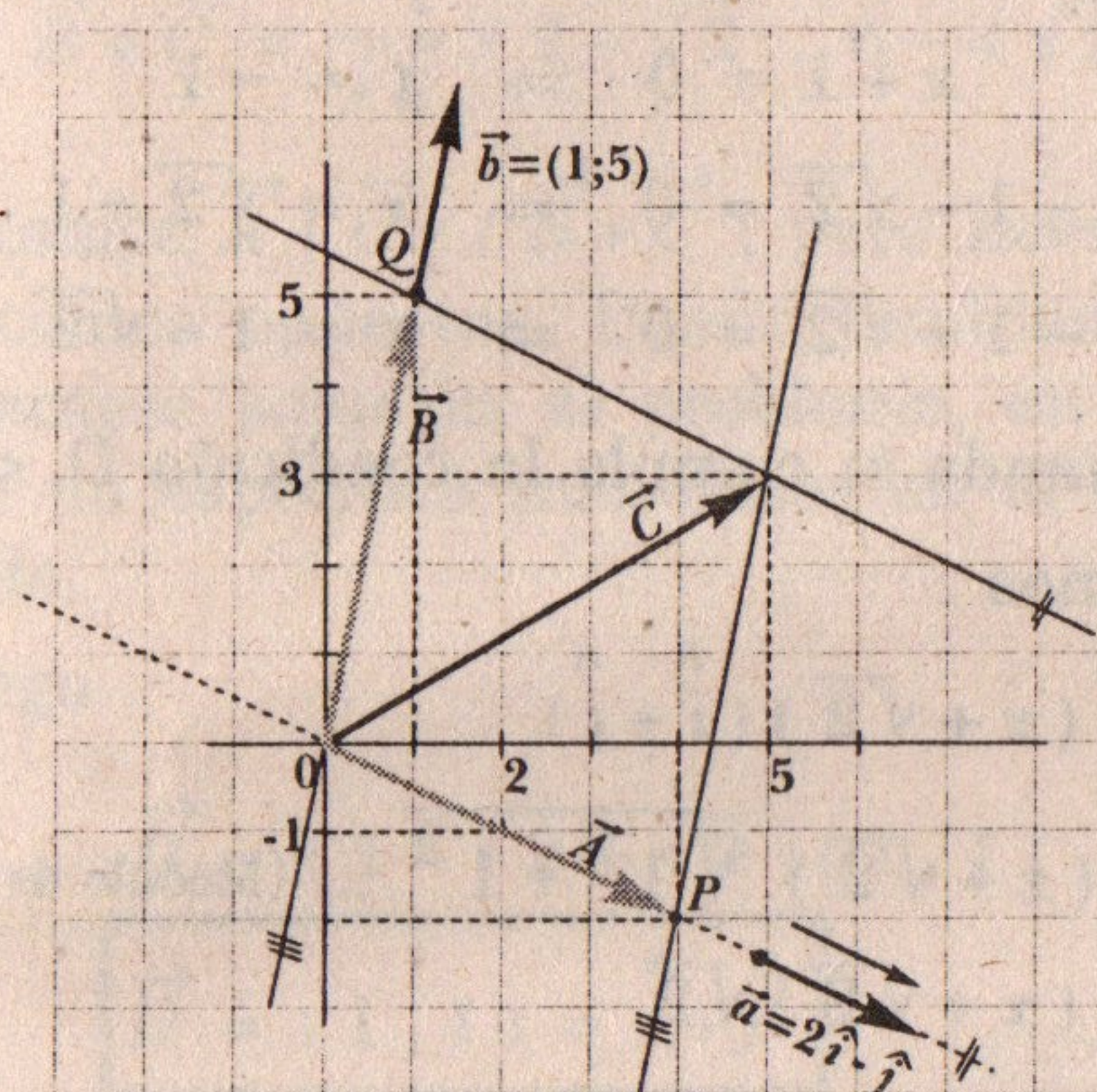
C) $\sqrt{5}$; $\sqrt{26}$ D) $2\sqrt{5}$; $2\sqrt{26}$

E) $\sqrt{6}$; $\sqrt{24}$

RESOLUCIÓN

Lo haremos por el método gráfico y ayudándonos con las cuadrículas.

Graficamos los vectores : $\vec{c} = (5, 3)$

y también : $(2, -1)$ y $(1, 5)$

Al trazar paralelas a los vectores "A" y "B" desde la cabeza del vector notamos que corta exactamente en los puntos "P" y "Q" ; luego :

$$\vec{A} = \vec{OP} = (4, -2) \quad , \quad \vec{B} = \vec{OQ} = (1, 5)$$

Los módulos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ serán :

$$A = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$B = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

$$\therefore \boxed{A = 2\sqrt{5} \; ; B = \sqrt{26}}$$

Clave: A

PROBLEMA 94

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ son tres vectores unitarios y además : $\vec{v} + \sqrt{3}\,\vec{u} + 2\,\vec{w} = \vec{0}$; entonces el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es :

A) 0° B) 30° C) 45

D) 60° E) 120°

RESOLUCIÓN

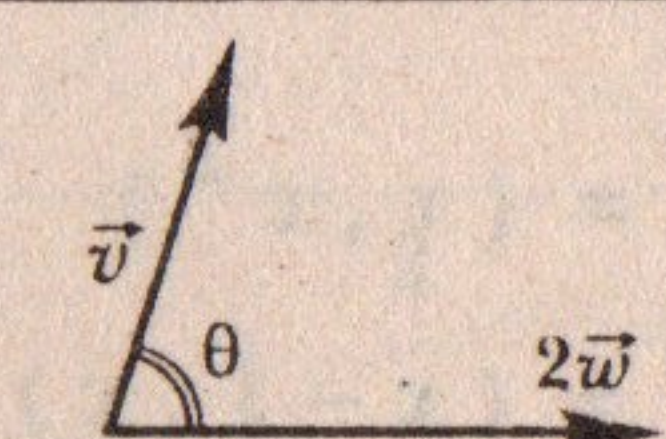
Dato : $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ son vectores unitarios

$$u = v = w = 1$$

De la condición :

$$\vec{v} + 2\,\vec{w} = -\sqrt{3}\,\vec{\mu}$$

$$|\vec{v} + 2\,\vec{w}| = |-\sqrt{3}\,\vec{\mu}|$$

$$= \sqrt{3}\,|-\vec{\mu}|$$

$$|\vec{v} + 2\,\vec{w}| = \sqrt{3}$$

Por la regla del paralelogramo:

$$\sqrt{v^2 + (2w)^2 + 2 \cdot v \cdot (2w)\cos\theta} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{1^2 + 2^2 + 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times \cos\theta} = \sqrt{3}$$

$$5 + 4\cos\theta = 3$$

$$\cos\theta = -1/2$$

Luego : $\boxed{\theta = 120°}$

Clave: E

Nota:

$$\boxed{\cos 120° = \cos(90° + 30°) = -sen\,30}$$

PROBLEMA 95 [Sem. CEPRE-UNI 97-II]

Consideremos los siguientes vectores :

$$\vec{A} = x\hat{i} + x^2\hat{j}$$

$$\vec{B} = (x - 1)\hat{i} + x\hat{j}$$

$$\vec{C} = \hat{i} + (1 + 2x)\hat{j}$$

si : $\vec{A}+\vec{C} \,//\, \vec{B}+\vec{C}$

Halle :

$\vec{D} = (x+\sqrt{2})(\hat{i}+\hat{j})$ tal que $D < 2$

A) $(2\sqrt{2}+1)(\hat{i}+\hat{j})$

B) $\hat{i}+\hat{j}$

C) $(\sqrt{2}+1)(\hat{i}+\hat{j})$

D) $(\sqrt{2}-1)(\hat{i}+\hat{j})$

E) B y D

RESOLUCIÓN

Nos piden :

$$\vec{D} = (x+\sqrt{2})(\hat{i}+\hat{j}) \;;\; D < 2$$

Datos :

$$\vec{A} = (x, x^2)$$
$$\vec{B} = (x-1, x)$$
$$\vec{C} = (1, 1+2x)$$

Además

$$\vec{A}+\vec{C} = (x+1, x^2+2x+1)$$
$$\vec{B}+\vec{C} = (x, 1+3x)$$

Dicen :

$$\vec{A}+\vec{C} \,//\, \vec{B}+\vec{C}$$

Luego :

$$(x+1, x^2+2x+1) = k(x, 1+3x)$$

Pero : $k \in \mathbb{R}$

Igualando componentes

a) $x+1 = kx \Rightarrow k = \dfrac{x+1}{x}$ ... (I)

b) $x^2+2x+1 = k(1+3x)$

Reemplazando (I) :

$$x^2+2x+1 = \frac{(x+1)}{x}(1+3x)$$

$$x(x+1)^2 = (x+1)(1+3x)$$
$$(x+1)[x(x+1)-(1+3x)] = 0$$
$$(x+1)(x^2-2x-1) = 0$$
$$(x+1)(x^2-2x+1-2) = 0$$
$$(x+1)\left((x-1)^2-(\sqrt{2})^2\right) = 0$$

Factorizando :

$$(x+1)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2}) = 0$$

Igualando a cero cada factor.

$$x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$
$$x-1-\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}+1$$
$$x-1+\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = 1-\sqrt{2}$$

Evaluando si cumple la condición $D < 2$

Sabemos :

$$\vec{D} = (x+\sqrt{2})(\hat{i}+\hat{j})$$

$D = (x+\sqrt{2})\sqrt{1^2+1^2}$ ... (Módulo de $\vec{D}$)

$$D = (x+\sqrt{2})\sqrt{2}$$
$$D = \sqrt{2}\,x+2$$

$\therefore$ ¡ x es negativo !

Si $D < 2 \Rightarrow x < 0$; ¡"x" es negativo!

Los valores de "x" que cumplen son :

$$x_1 = -1$$
$$x_2 = 1-\sqrt{2}$$

Si $\boxed{x_1 = -1}$

$$\vec{A}+\vec{C} = (0, 0)$$
$$\vec{B}+\vec{C} = (-1, -2)$$

Luego : $\vec{A}+\vec{C} \,//\, \vec{B}+\vec{C}$

Todo vector nulo es paralelo a cualquier vector

Finalmente $\boxed{\vec{D} = (-1+\sqrt{2})(\hat{i}+\hat{j})}$

Si $\boxed{x = 1-\sqrt{2}}$

$\vec{A}+\vec{C} = (2-\sqrt{2}, 6-4\sqrt{2})$ ... (α)

$\vec{B}+\vec{C} = (1-\sqrt{2}, 4-3\sqrt{2})$

Damos forma a : $\vec{B}+\vec{C}$

$$\vec{B}+\vec{C} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2}, 4-3\sqrt{2})$$
$$\vec{B}+\vec{C} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-2, 4\sqrt{2}-6)$$
$$\vec{B}+\vec{C} = \frac{-1}{\sqrt{2}}(2-\sqrt{2}, 6-4\sqrt{2})$$

Notamos $\vec{A}+\vec{C} \,//\, \vec{B}+\vec{C}$; pero llevan direcciones opuestas. Puede también considerarse solución al problema, en vista que no especifica más datos en el enunciado.

Luego :

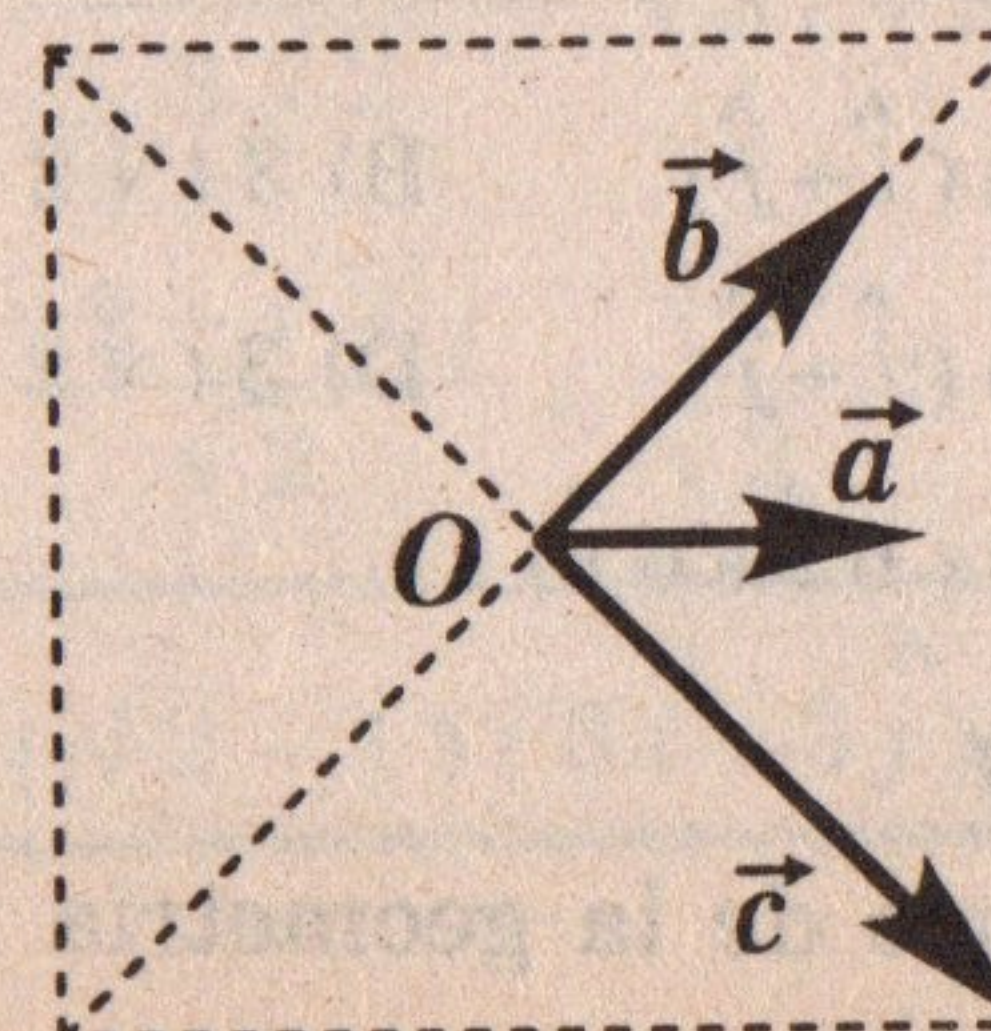
$$\vec{D} = (1-\sqrt{2}+\sqrt{2})(1, 1)$$

$\boxed{\vec{D} = (1, 1) = \hat{i}+\hat{j}}$

$\therefore$ $\boxed{\text{Este prob. admite 2 soluciones}}$

<u>*Clave: E*</u>

PROBLEMA 96

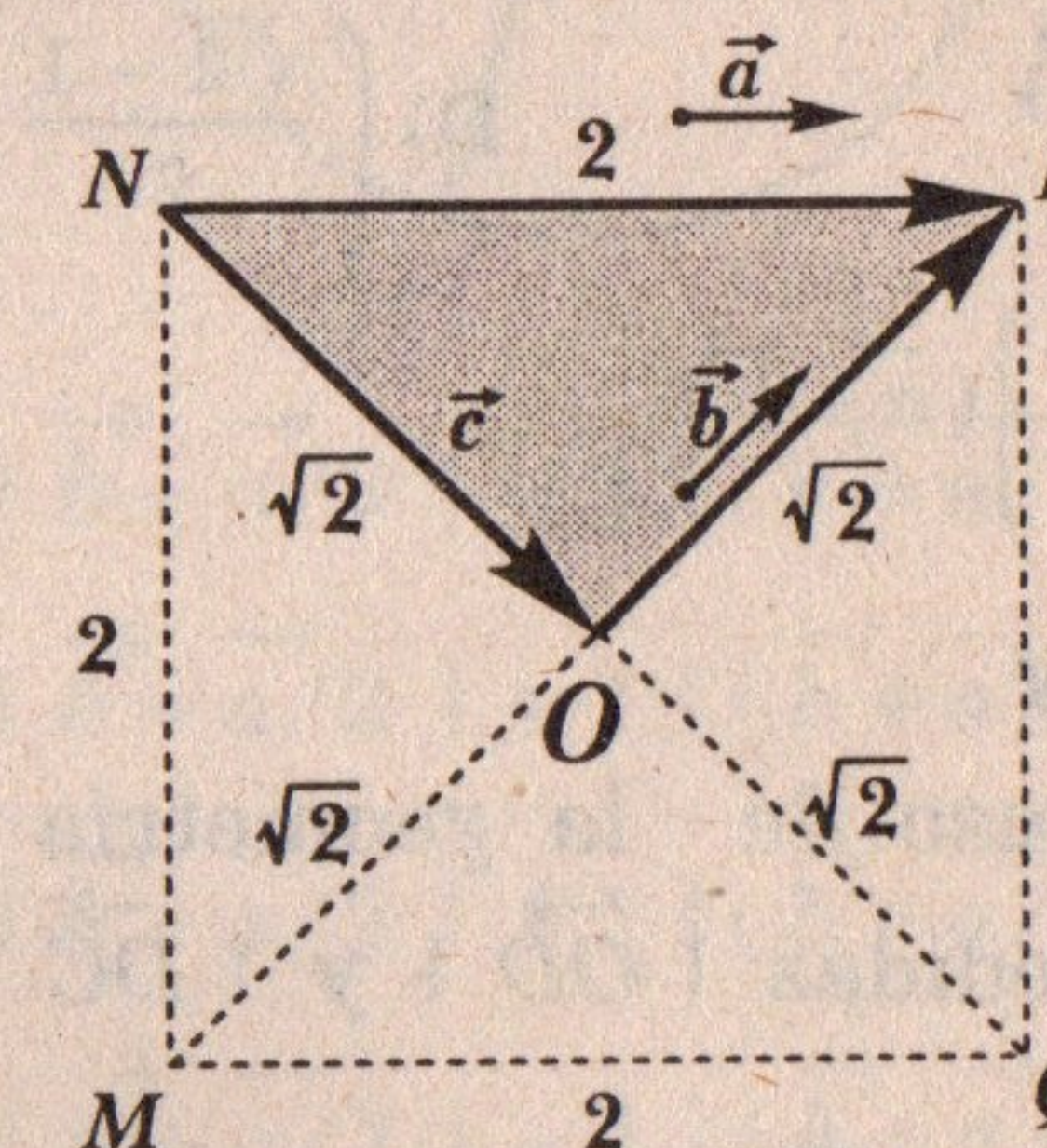
Si "O" es el centro del cuadrado y $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios, halle la expresión del vector $\vec{c}$ en términos de $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Considere lado del cuadrado : 2

A) $\vec{a}+\sqrt{2}\,\vec{b}$ B) $\vec{a}-\sqrt{2}\,\vec{b}$

C) $2\vec{a}-\sqrt{2}\,\vec{b}$ D) $2\vec{a}+\sqrt{2}\,\vec{b}$

E) Faltan datos

RESOLUCIÓN

Grafiquemos el cuadrado y los vectores respectivos.

Tener presente $\boxed{\vec{A} = A \cdot \vec{\mu}_A}$ (teoría)

En la figura :

$$\vec{NO} = \vec{c}$$
$$\vec{OP} = \sqrt{2}\,\vec{b}$$
$$\vec{NP} = 2\,\vec{a}$$

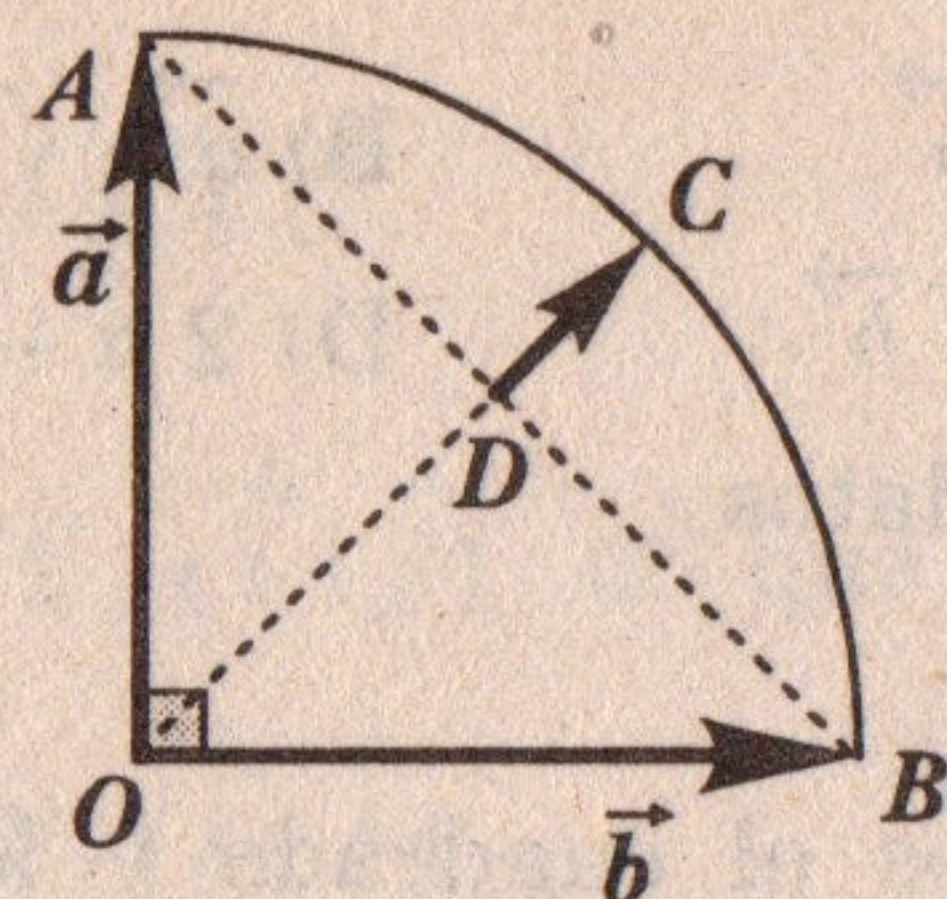
En el triángulo sombreado :

$$\vec{NP} = \vec{NO}+\vec{OP}$$
$$2\vec{a} = \vec{c}+\sqrt{2}\,\vec{b}$$

$\therefore$ $\boxed{\vec{c} = 2\vec{a}-\sqrt{2}\,\vec{b}}$

<u>*Clave: C*</u>

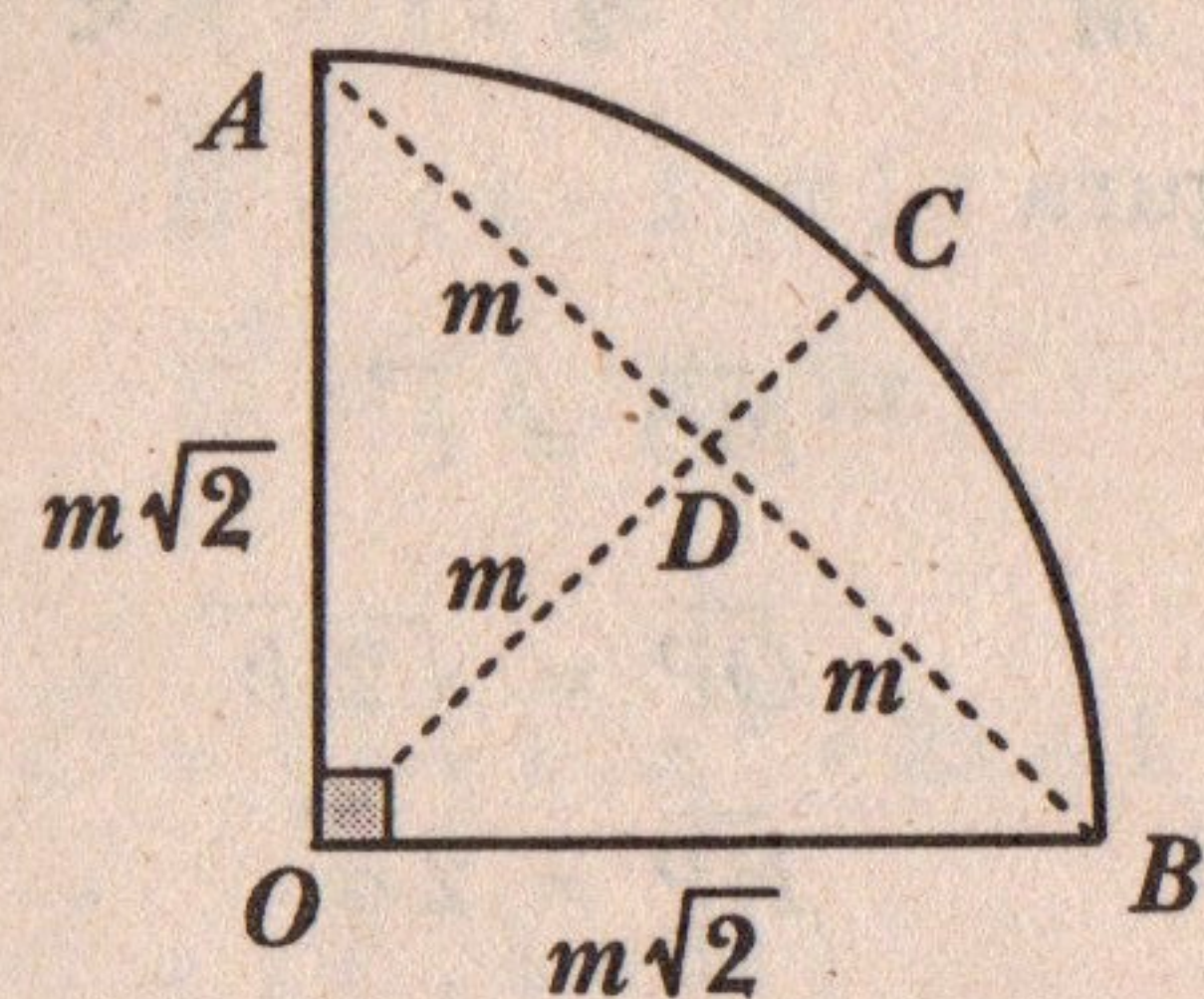
PROBLEMA 97

En el gráfico $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ y ACB es un cuarto de circunferencia. Halle $\vec{DC}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

A) $(\sqrt{2}-1)(\vec{a}+\vec{b})$ B) $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)(\vec{a}+\vec{b})$

C) $\frac{3}{5}(\vec{a}+\vec{b})$ D) $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)(\vec{a}+\vec{b})$

E) $\left(\frac{2}{\sqrt{2}-1}\right)(\vec{a}+\vec{b})$

RESOLUCIÓN

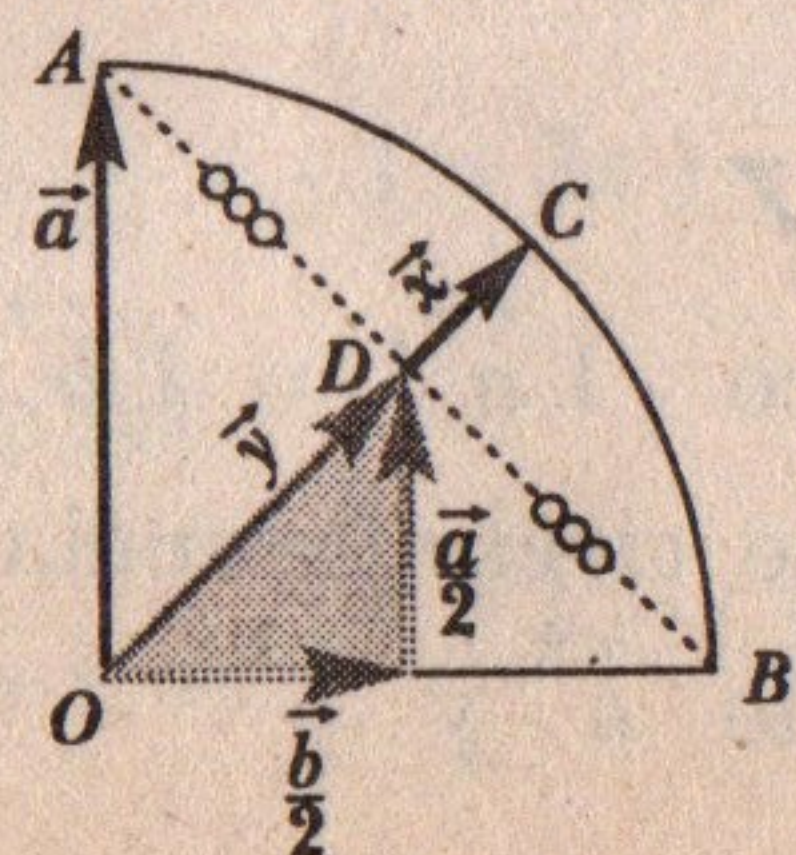
Haciendo uso de la geometría calculamos las medidas $|\vec{OD}|$ y $|\vec{DC}|$.

* Radio de la circunferencia = R

$$R = OA = OB = OC = m\sqrt{2}$$

$$OD = m$$

Luego: $|\vec{DC}| = m\sqrt{2} - m$

$$DC = m(\sqrt{2}-1)$$

Graficando los vectores :

Llamemos

$$\vec{OD} = \vec{y}$$

$$\vec{DC} = \vec{x} = ??$$

En el ◺ sombreado : $\vec{y} = \frac{\vec{b}}{2} + \frac{\vec{a}}{2}$

Pero : $\vec{y} // \vec{x}$

$$\frac{\vec{y}}{y} = \frac{\vec{x}}{x}$$

$$\boxed{\vec{x} = \frac{x}{y}\cdot\vec{y}}$$

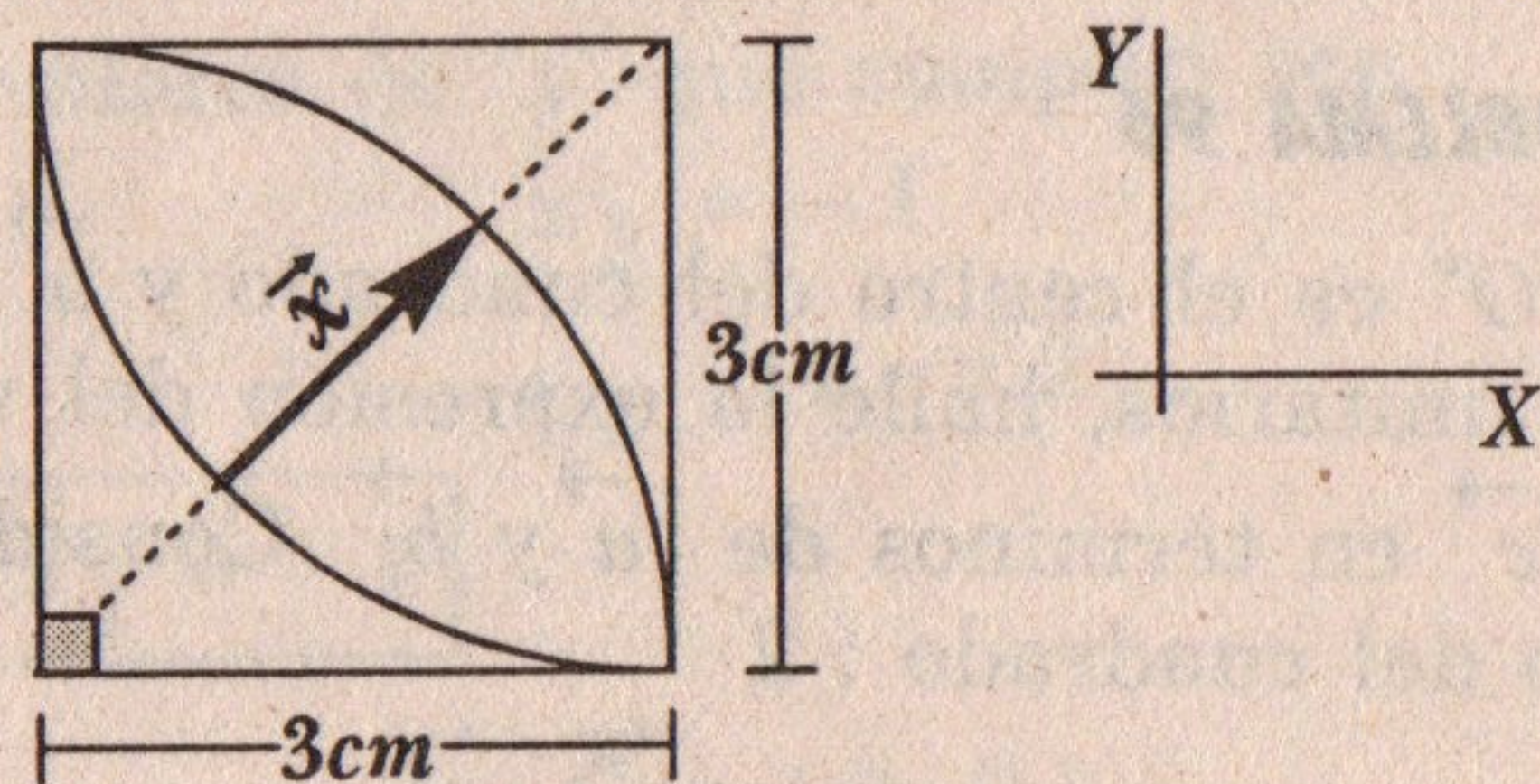
Reemplazando :

$$\vec{x} = \frac{m(\sqrt{2}-1)}{m}\cdot\left(\frac{\vec{b}}{2}+\frac{\vec{a}}{2}\right)$$

$$\boxed{\vec{x} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}(\vec{a}+\vec{b})}$$

Clave: D

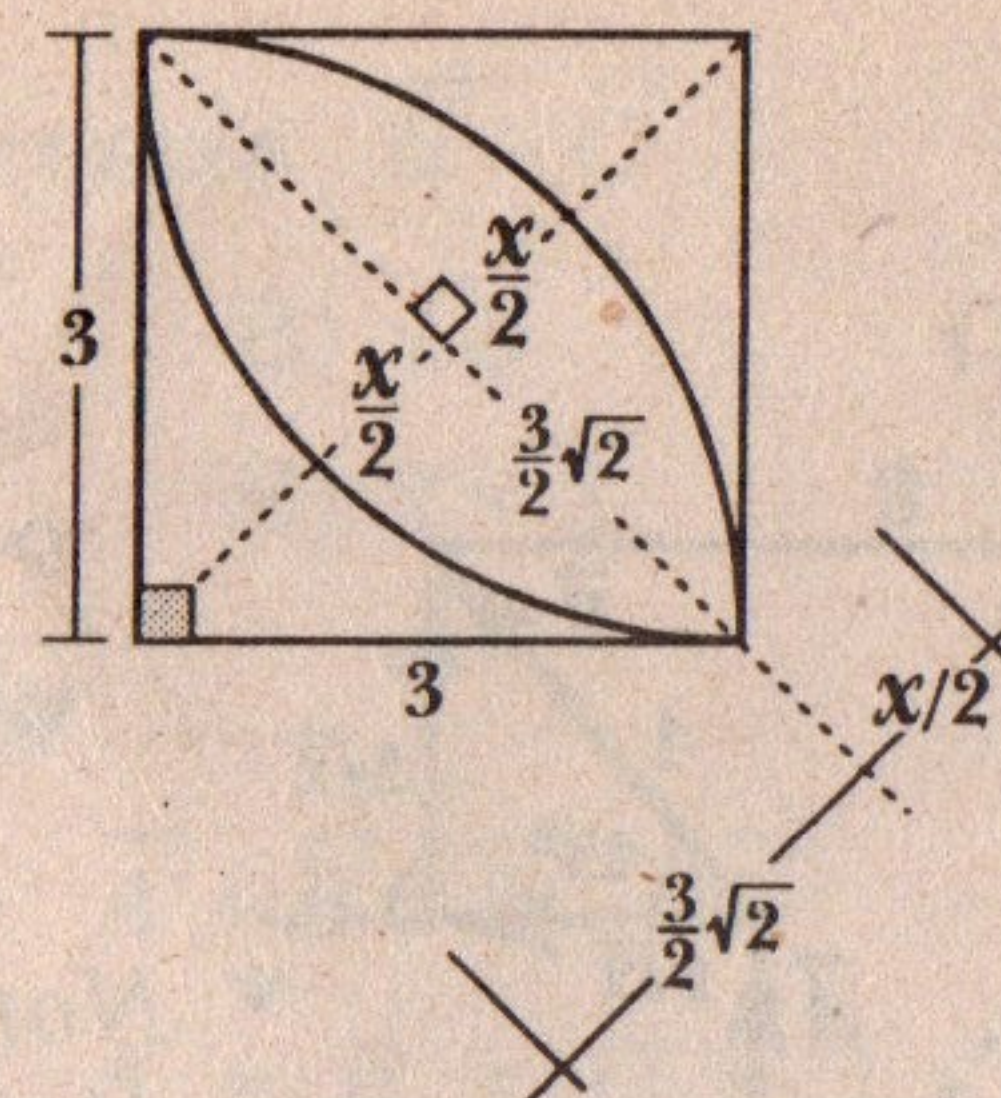
PROBLEMA 98

La figura mostrada es un cuadrado. Determine el vector $\vec{x}$, expresado en función de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$.

A) $(\sqrt{2}-1)(\hat{i}+\hat{j})$ B) $3(\sqrt{2}+1)(\hat{i}+\hat{j})$

C) $(\sqrt{2}+1)(\hat{i}+\hat{j})$ D) $3(\sqrt{2}-1)(\hat{i}+\hat{j})$

E) $(\sqrt{2}+1)(6\hat{i}+6\hat{j})$

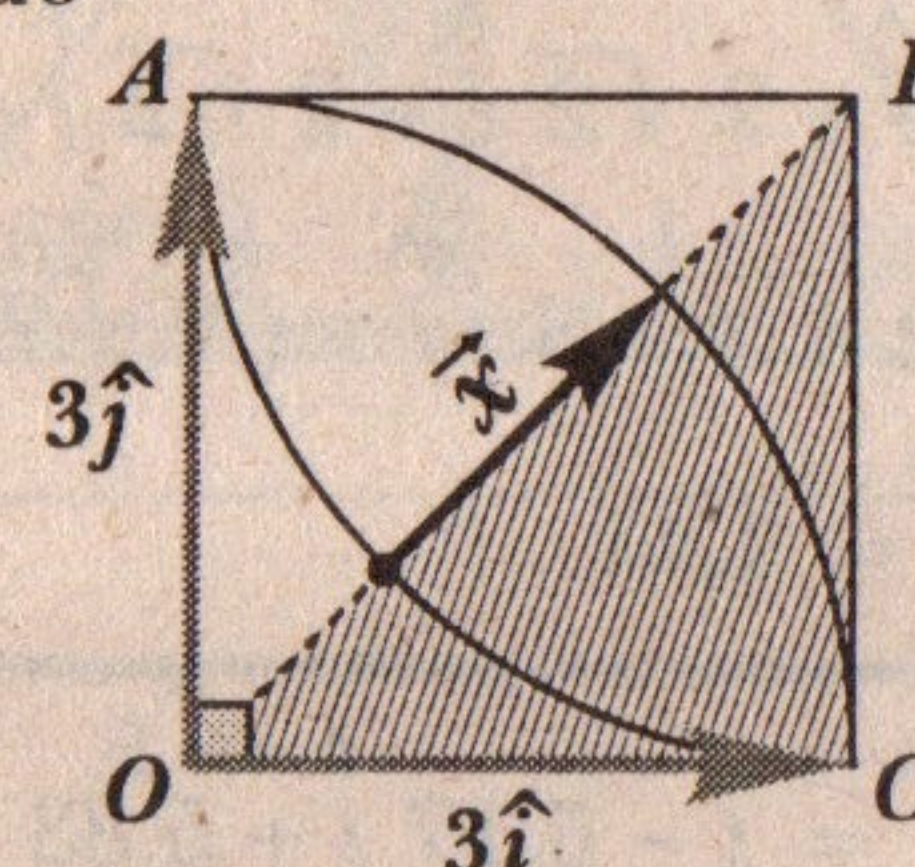
RESOLUCIÓN

Haciendo uso de la geometría :

En la figura : $\frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{x}{2} = 3$

$$x = 6 - 3\sqrt{2}$$

$$x = 3(2-\sqrt{2})$$

(Modulo de $\vec{x}$)

Redibujando

En el ◺ sombreado :

$$\vec{OB} = \vec{OC} + \vec{CB}$$

$$\vec{OB} = \vec{OC} + \vec{OA} = 3\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$|\vec{OB}| = 3\sqrt{2}$$

También : $\boxed{\vec{\mu}_x = \vec{\mu}_{OB}}$

$$\frac{\vec{x}}{x} = \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|}$$

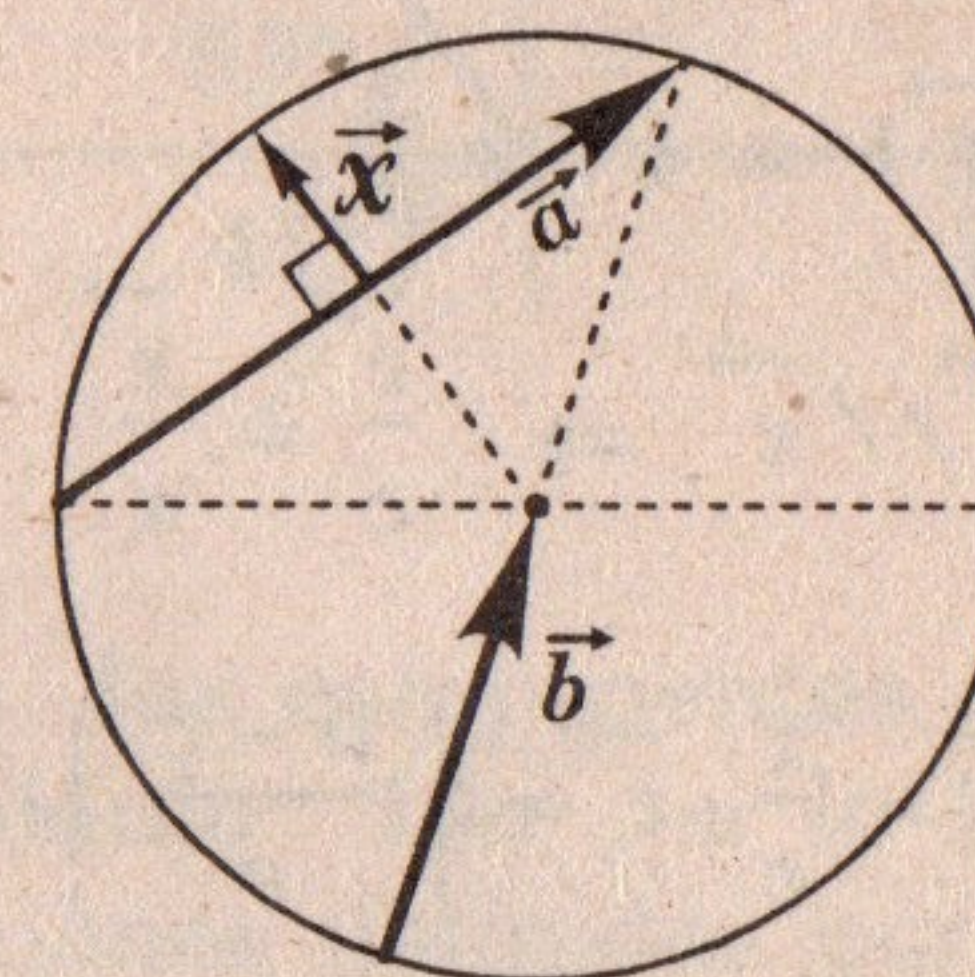
$$\vec{x} = \frac{3(2-\sqrt{2})}{3\sqrt{2}}\cdot(3\hat{i}+3\hat{j})$$

$$\vec{x} = \frac{(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(3\hat{i}+3\hat{j})$$

$$\therefore \boxed{\vec{x} = (\sqrt{2}-1)(3\hat{i}+3\hat{j})}$$

Clave: D

PROBLEMA 99

En la figura halle $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

A) $[b/|\vec{b}-\vec{a}/2| - 1](\vec{b}+\vec{a}/2)$

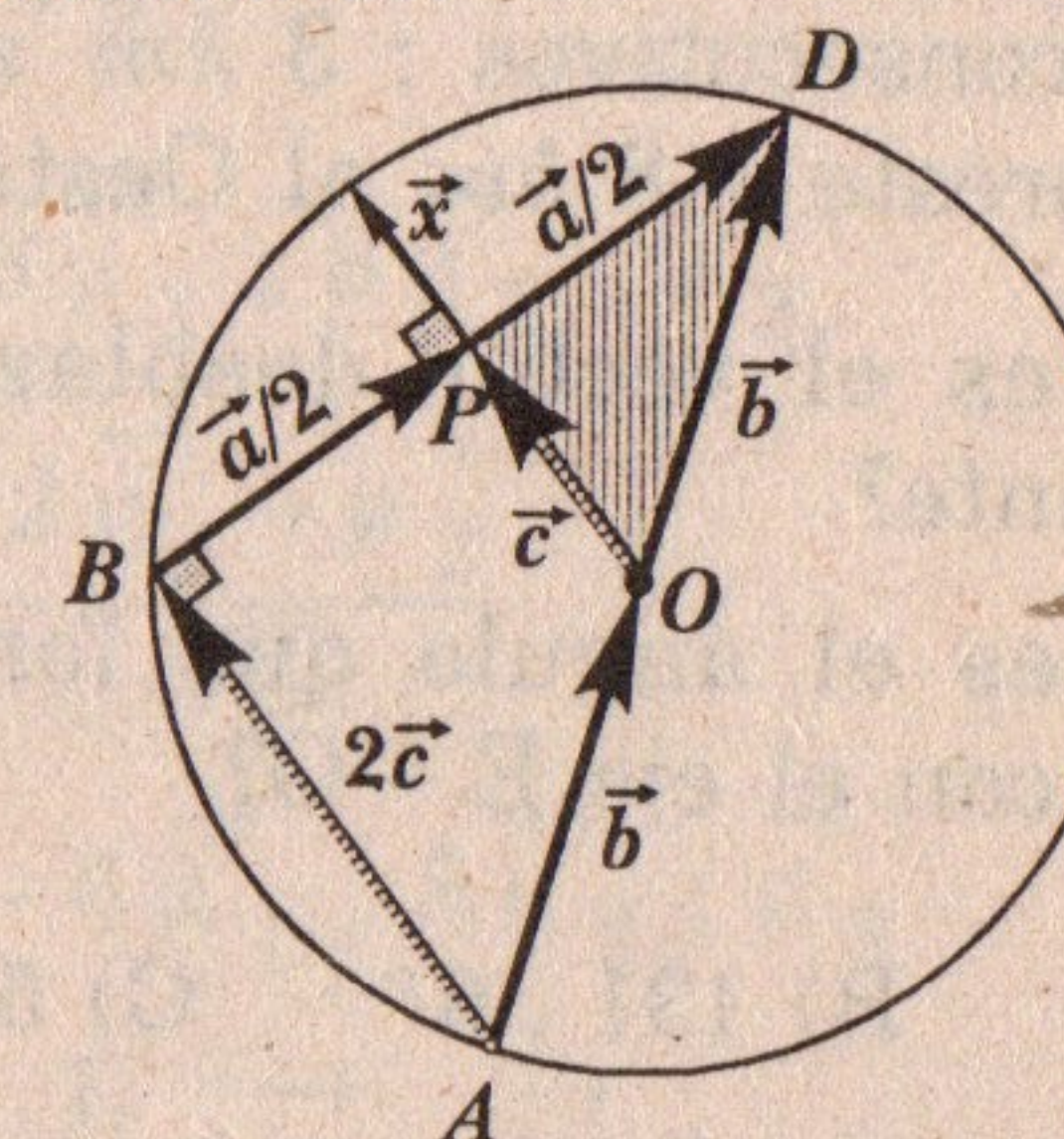
B) $[b/|\vec{b}+\vec{a}/2| + 1](\vec{b}+\vec{a}/2)$

C) $[b/|\vec{b}-\vec{a}/2| + 1](\vec{b}-\vec{a}/2)$

D) $[b/|\vec{b}+\vec{a}/2| - 1](\vec{b}+\vec{a}/2)$

E) $[b/|\vec{b}-\vec{a}/2| - 1](\vec{b}-\vec{a}/2)$

RESOLUCIÓN

Haciendo uso de la geometría hacemos trazos auxiliares.

* Notamos "P" punto medio de $\vec{BD}$.

* En el ◺ sombreado :

$$\vec{c} + \frac{\vec{a}}{2} = \vec{b}$$

$$\vec{c} = \vec{b} - \frac{\vec{a}}{2} \quad \text{... (I)}$$

$$|\vec{c}| = |\vec{b} - \vec{a}/2| \quad ...\text{(II)}$$

Notamos que el radio de la circunferencia tiene módulo $|\vec{b}| = b$

Luego : $|\vec{x}| = b - c$

Pero : $\vec{c} // \vec{x} \Rightarrow \dfrac{\vec{c}}{c} = \dfrac{\vec{x}}{x}$

$$\vec{x} = \frac{x}{c}\cdot\vec{c} = \left(\frac{b-c}{c}\right)\cdot\vec{c}$$

$$\vec{x} = \left(\frac{b}{c} - 1\right)\vec{c}$$

Reemplazando (I) y (II) :

$$\boxed{\vec{x} = \left((b/|\vec{b}-\vec{a}/2|) - 1\right)\left(\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}\right)}$$

Clave: E

PROBLEMA 100 (Sem. CEPRE-UNI 99-I)

Un camión efectúa los siguientes desplazamientos consecutivos : 3 km al Norte, 4 km al Noreste y 8 km al Oeste.

a) ¿Cuál es el vector desplazamiento resultante?

b) ¿Cuál es el ángulo que forma este vector con el eje E - O?

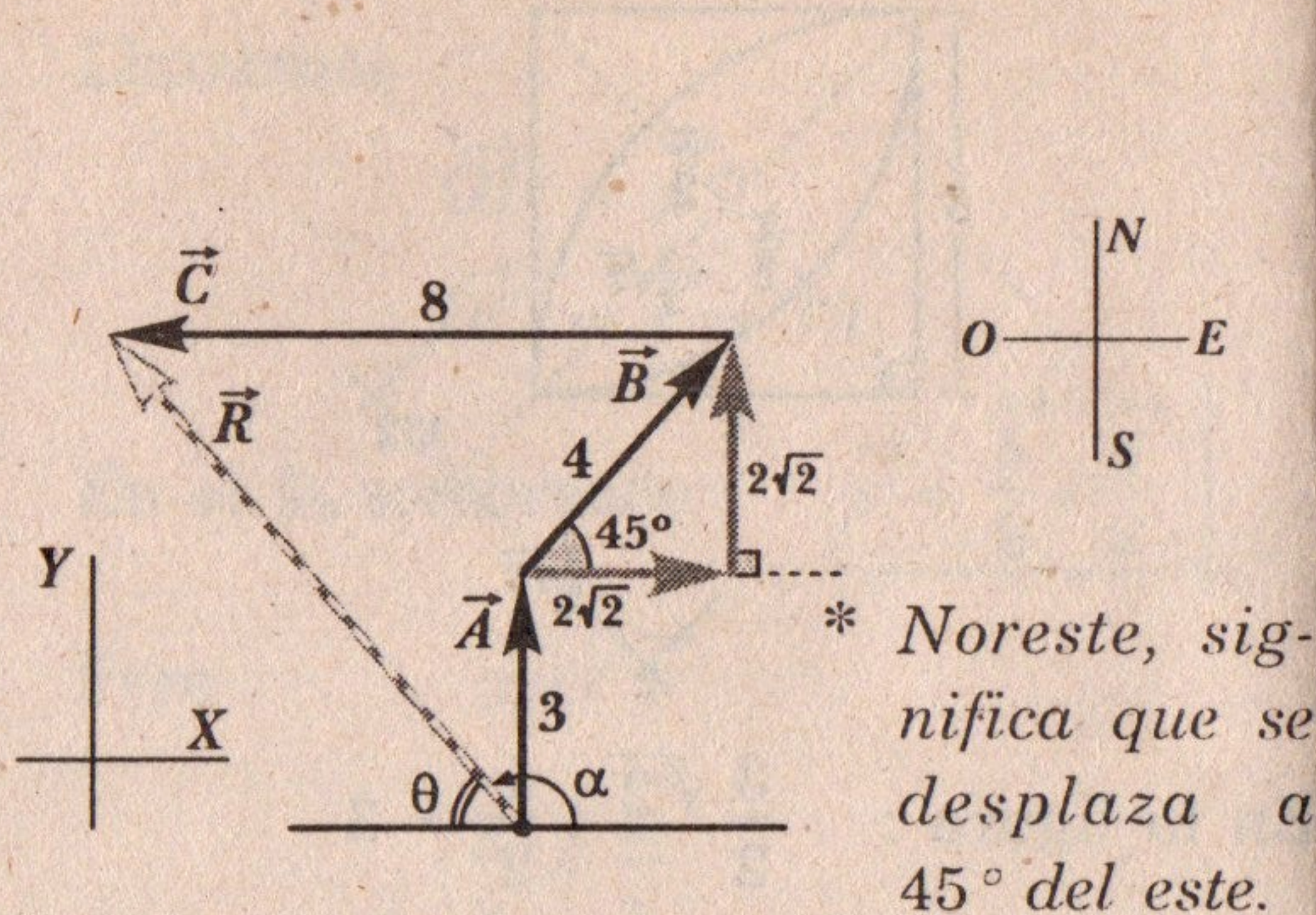
A) 37°/2 B) 131 , 6° C) 53°/2

D) 23° E) 10°

RESOLUCIÓN

Hacemos coincidir los puntos cardinales con los ejes cartesianos.

Si hay algún vector que tenga como dirección ángulo notable, se descompone para hallar sus componentes rectangulares.

* *Noreste, significa que se desplaza a 45° del este.*

Los desplazamientos lo expresamos como vectores :

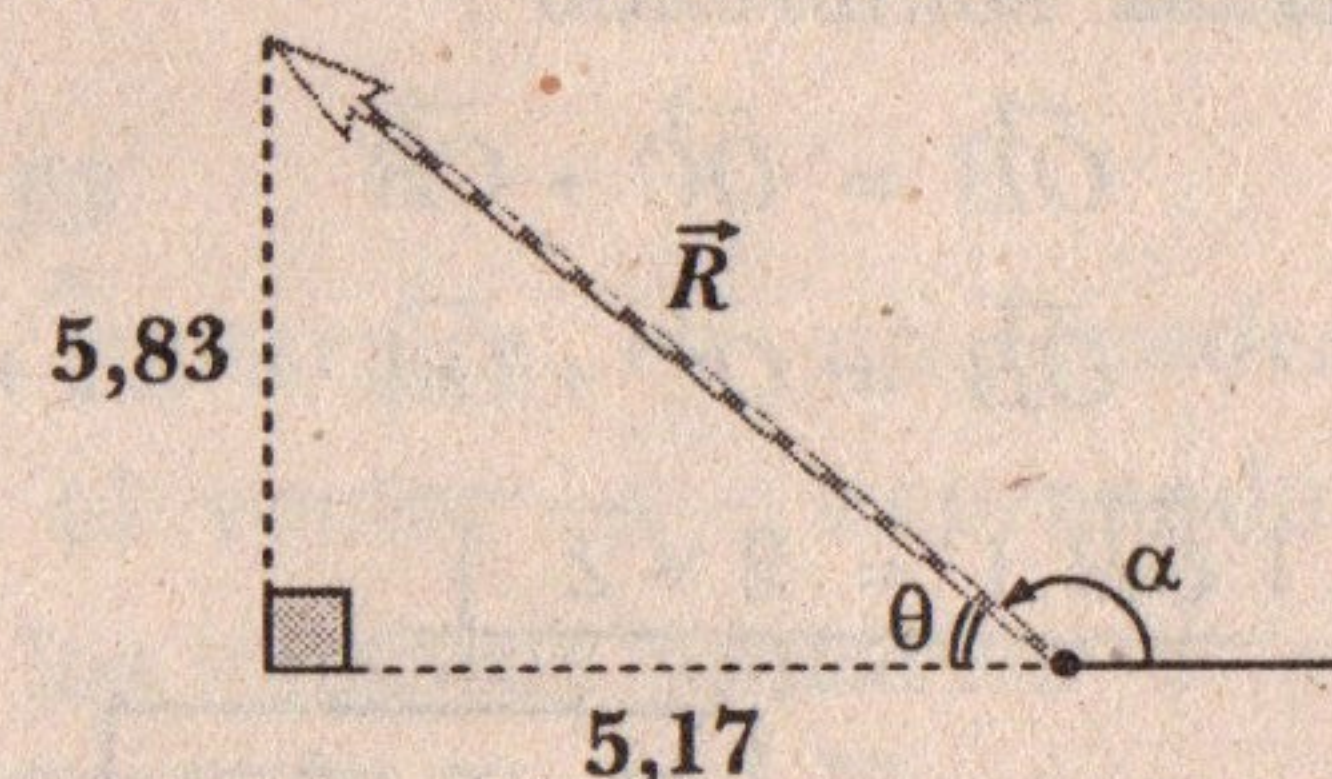
$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

$$\vec{R} = 3\hat{j} + 2\sqrt{2}\,\hat{i} + 2\sqrt{2}\,\hat{j} - 8\,\hat{i}$$

$$\vec{R} = (2\sqrt{2} - 8)\,\hat{i} + (2\sqrt{2} + 3)\,\hat{j}$$

$$* \ \sqrt{2} = 1{,}41$$

$$\boxed{\vec{R} = (-5{,}17\,\hat{i} + 5{,}83\,\hat{j})\ km}$$

También :

$$tg\,\theta = \frac{5{,}83}{5{,}17}$$

$$tg\,\theta = 1{,}1277$$

Mediante tablas o calculadora :

$$\theta = 48{,}4°$$

Luego : $\boxed{\alpha = 131{,}6°}$

Clave: B

PROBLEMA 101 (Sem. CEPRE-UNI 99-II)

La suma de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$, de igual longitud, todos ellos en el plano XY es cero. Si $\vec{A} = \hat{i}$, hallar el módulo

de la diferencia $\vec{B} - \vec{C}$.

A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}$

D) 1 E) $2\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN

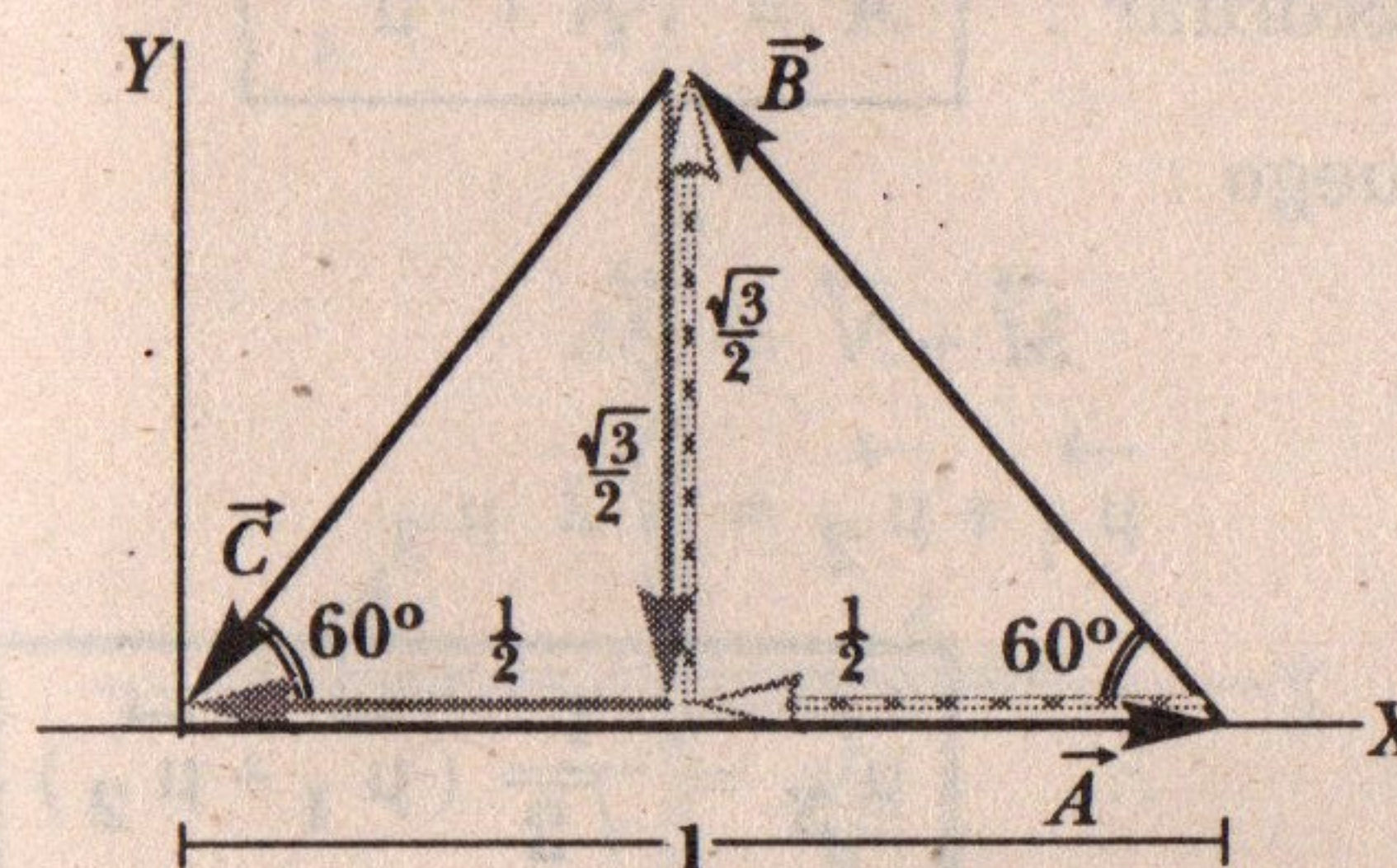
Datos : $* \ \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$; $* \ \vec{A} = \hat{i}$

$* \ A = B = C = 1$

Graficando el triángulo equilátero y hallando las componentes cartesianas de cada vector.

$$\vec{A} = \hat{i}$$

$$\vec{B} = -\frac{\hat{i}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}$$

$$\vec{C} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j} - \frac{1}{2}\hat{i}$$

Nos piden : $\vec{B} - \vec{C} = ??$

$$\vec{B} - \vec{C} = -\frac{\hat{i}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j} - \frac{\hat{i}}{2}\right)$$

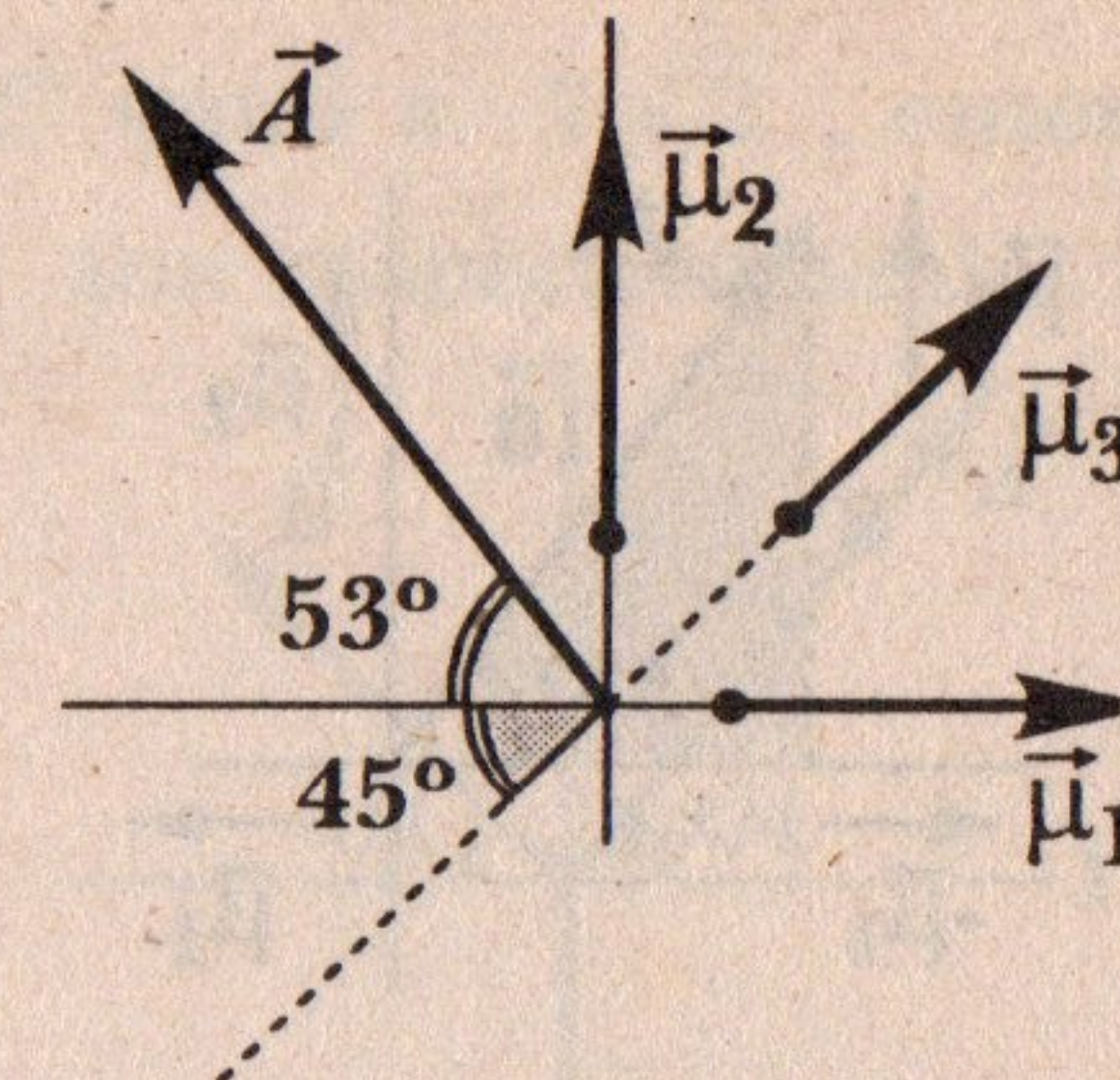
$$\vec{B} - \vec{C} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}$$

$$\vec{B} - \vec{C} = \sqrt{3}\,\hat{j}$$

$$\boxed{|\vec{B} - \vec{C}| = \sqrt{3}}$$

Clave: B

PROBLEMA 102 (Sem. CEPRE-UNI 2000-II)

Si los vectores $\vec{\mu}_1$, $\vec{\mu}_2$, $\vec{\mu}_3$ son unitarios

a) Halle las componentes del vector $\vec{A}$ de módulo $10u$, a lo largo de las direcciones definidas por c/u de los vectores unitarios.

b) Exprese el vector $\vec{\mu}_3$ en función de $\vec{\mu}_1$ y $\vec{\mu}_2$.

A) a) $6\vec{\mu}_1$; $8\vec{\mu}_2$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{\mu}_3$;

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2)$

B) a) $3\vec{\mu}_1$; $4\vec{\mu}_2$; $\vec{\mu}_3$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}(\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_2)$

C) a) $6\vec{\mu}_1$; $8\vec{\mu}_2$; $\vec{\mu}_3$

b) $\dfrac{2\vec{\mu}_1 + \mu_2}{\sqrt{5}}$

D) a) $-6\vec{\mu}_1$; $8\vec{\mu}_2$; $\vec{\mu}_3$

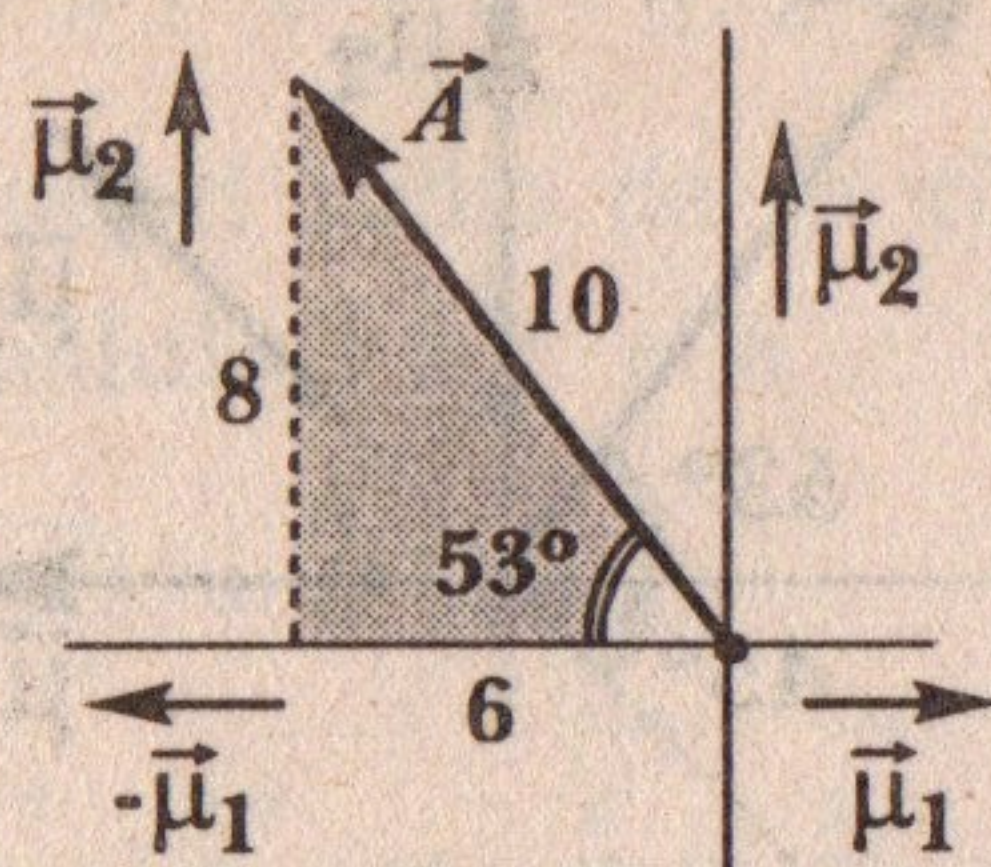
b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_2)$

E) a) $-6\vec{\mu}_1$; $8\vec{\mu}_2$; $\sqrt{2}\,\vec{\mu}_3$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2)$

RESOLUCIÓN

a) Cálculo de las componentes de $\vec{A}$.

1º

La componente de $\vec{A}$ sobre "μ_1" será :

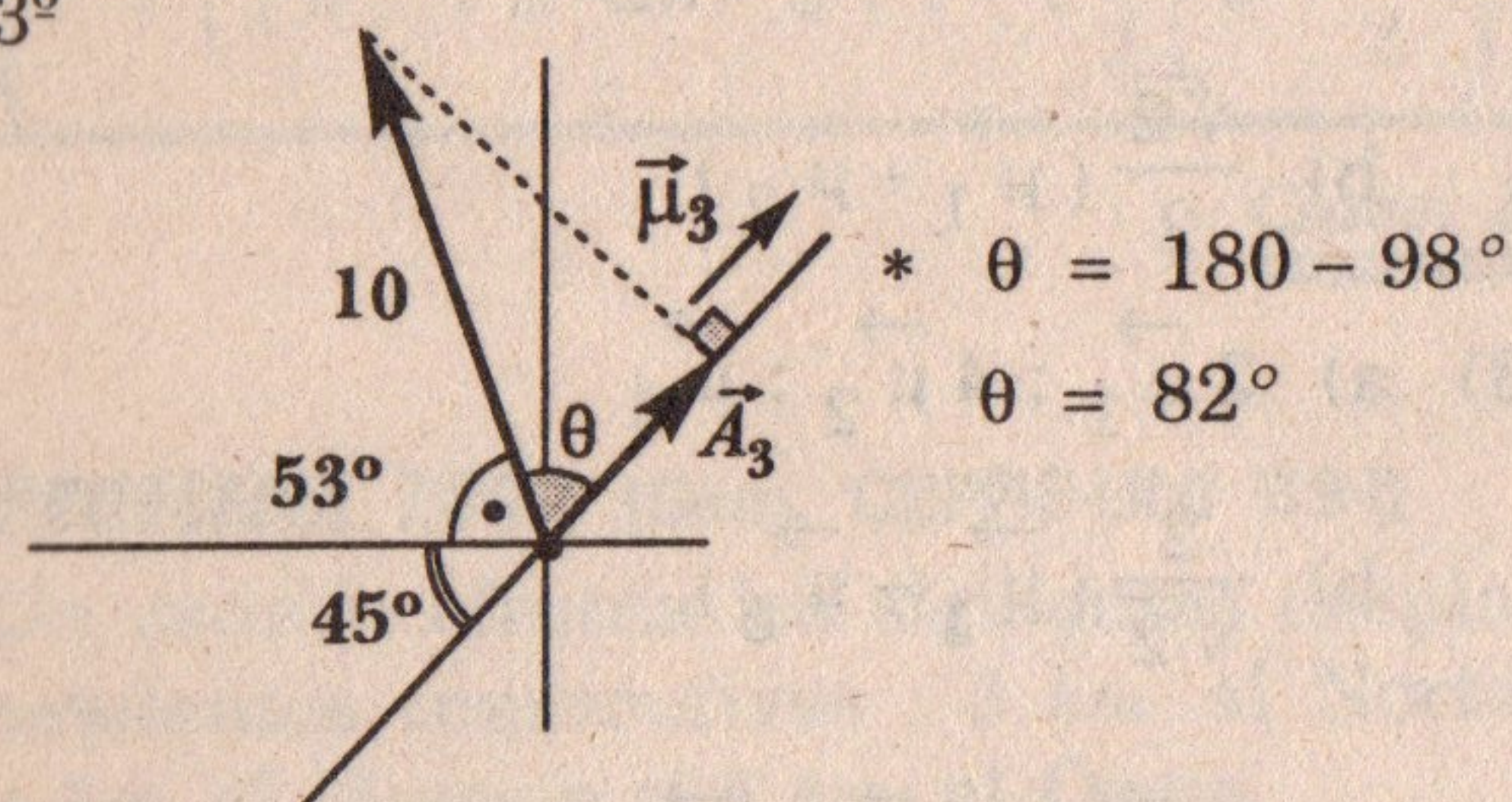
$$\boxed{\vec{A}_1 = -6\vec{\mu}_1}$$ *Rpta.*

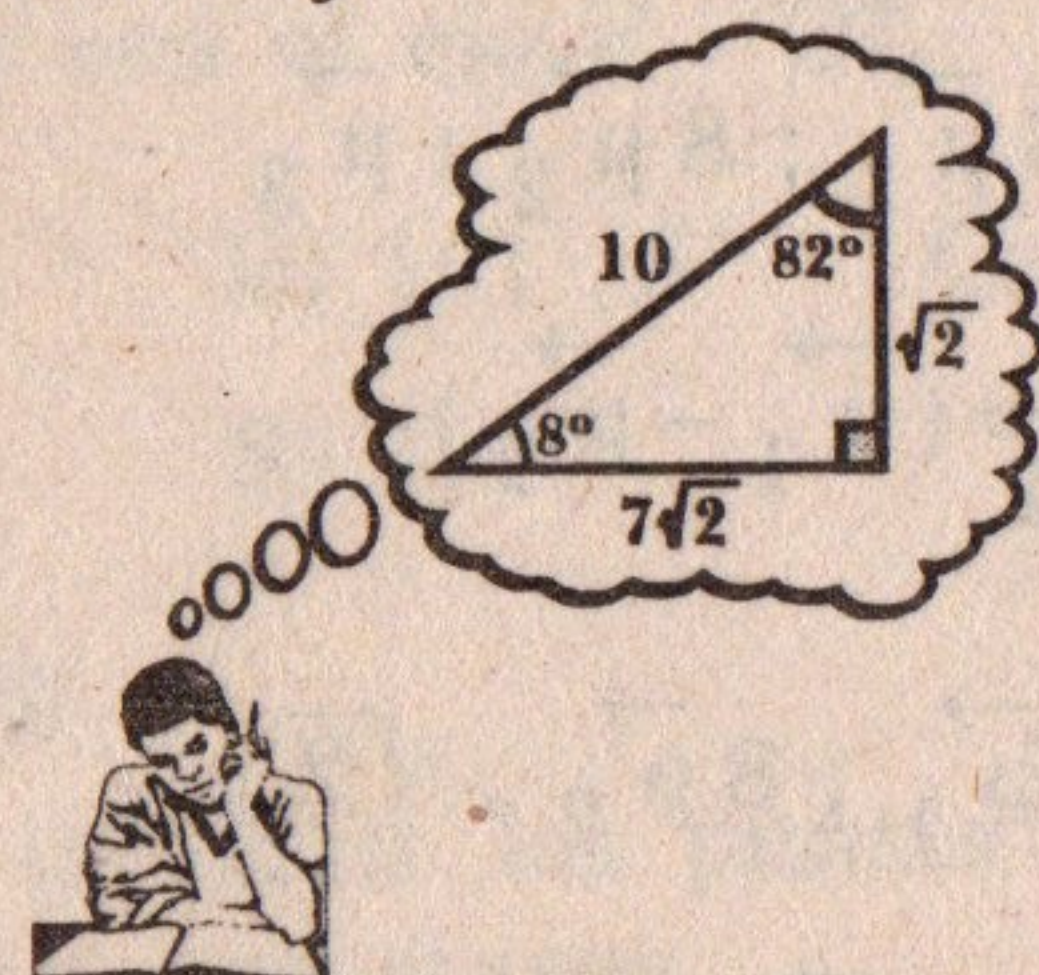
2º En la figura anterior la componente vertical tiene 8 unidades

$$\boxed{\vec{A}_2 = 8\vec{\mu}_2}$$ *Rpta.*

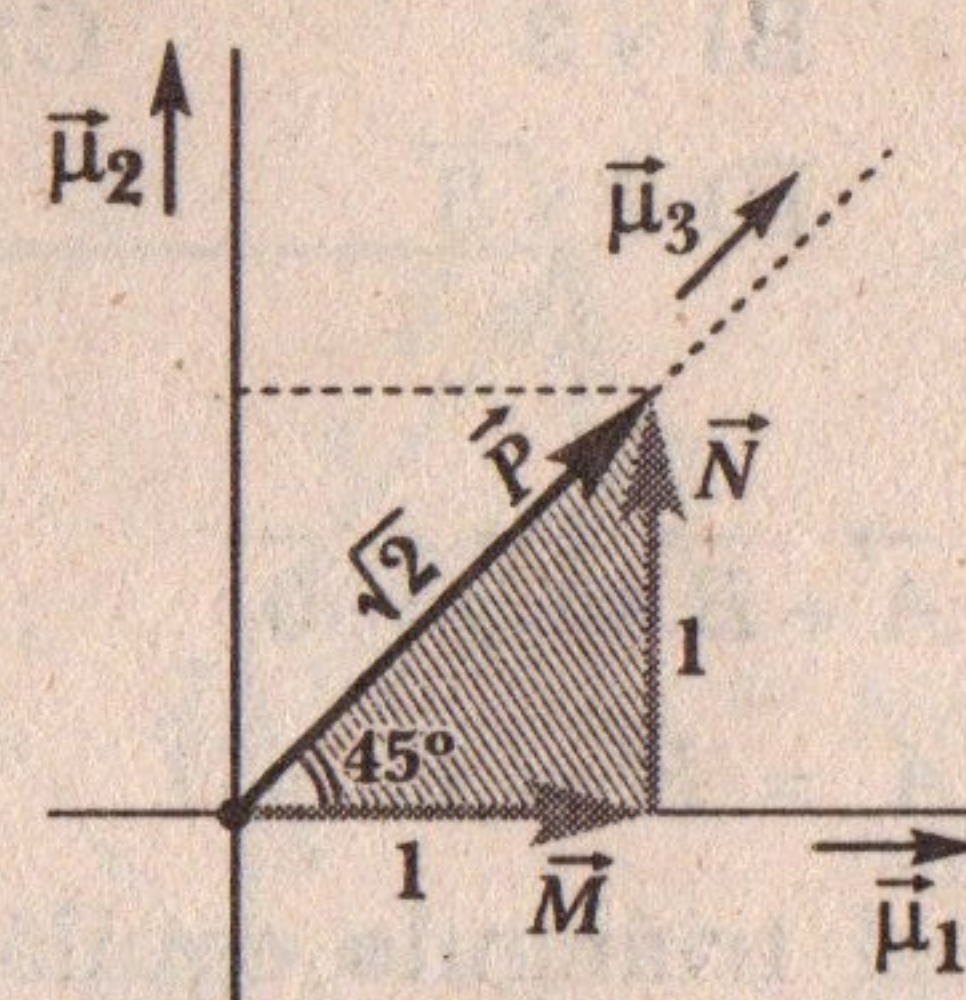
3º

$* \ \theta = 180 - 98°$

$\theta = 82°$

$$A_3 = 10\cos 82°$$

El ◣ de 8° y 82° tiene como lados.

$$\Rightarrow \quad A_3 = \cancel{10} \times \frac{\sqrt{2}}{\cancel{10}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{A}_3 = \sqrt{2}\,\vec{\mu}_3}$$ *Rpta.*

b) Ubicamos los vectores unitarios en un triángulo rectángulo.

Recordar : $\boxed{\vec{A} = |\vec{A}| \cdot \vec{\mu}_A}$

Luego :

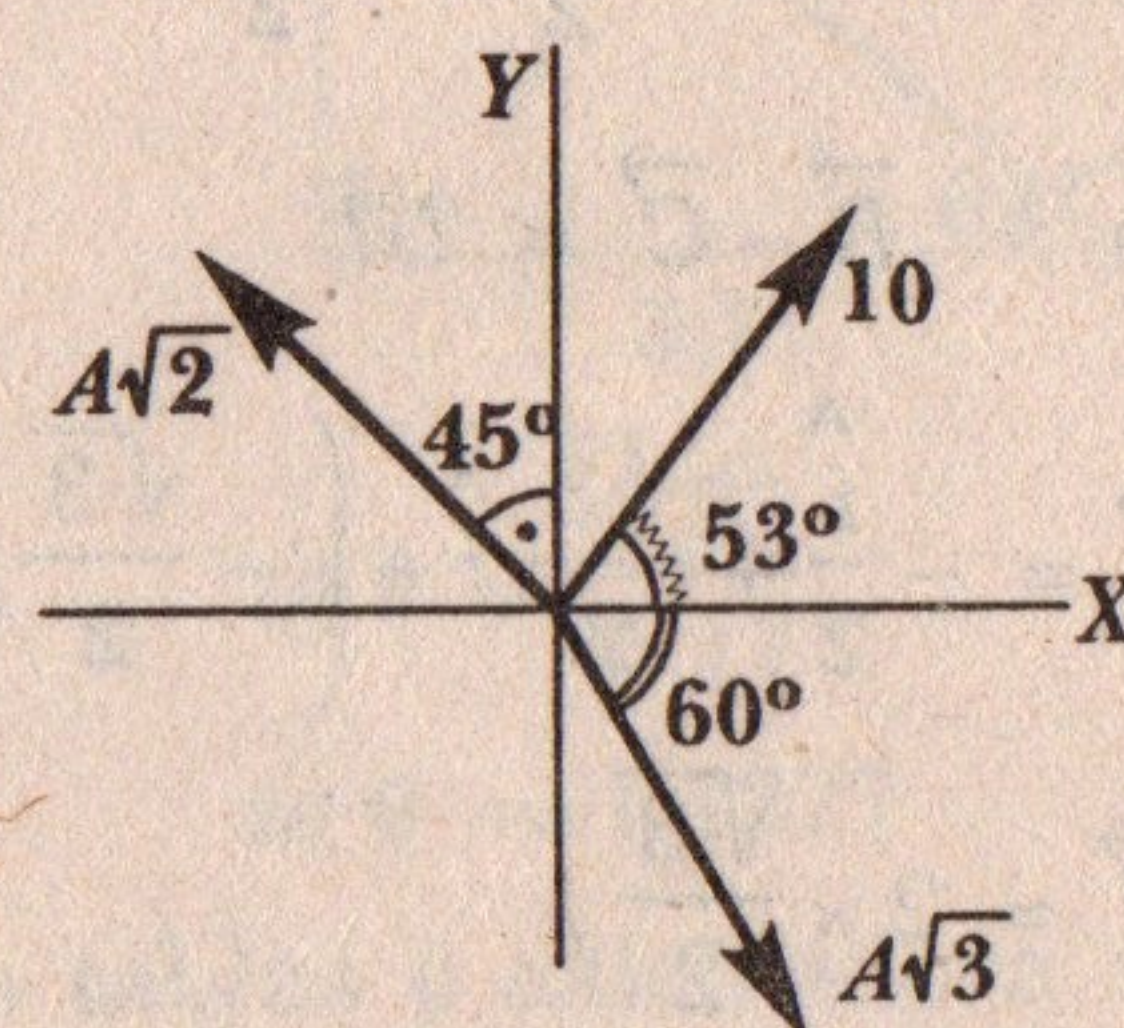
$$\vec{M} + \vec{N} = \vec{P}$$

$$\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 = \sqrt{2}\ \mu_3$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{\mu}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2)}$$

Clave: E

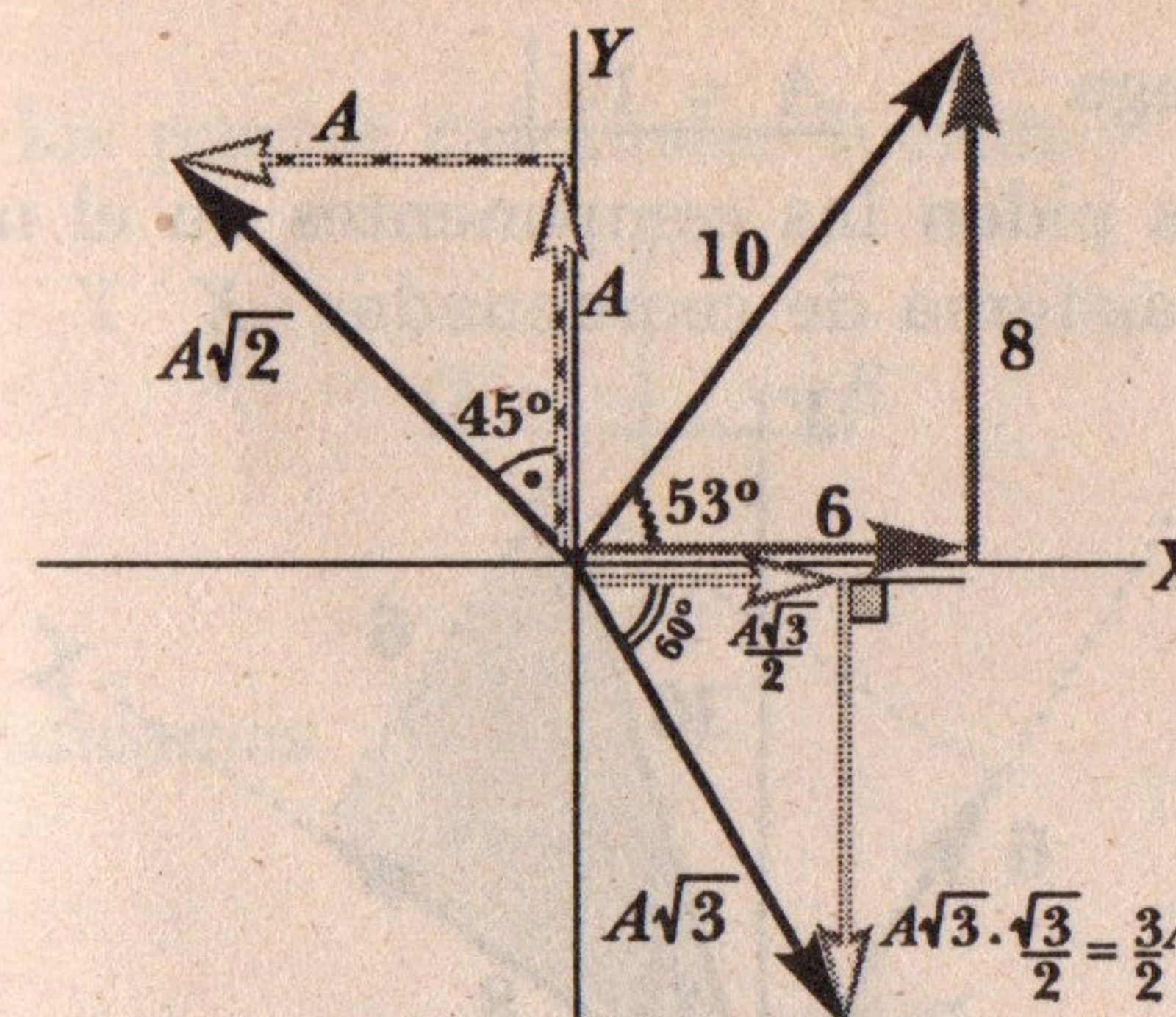
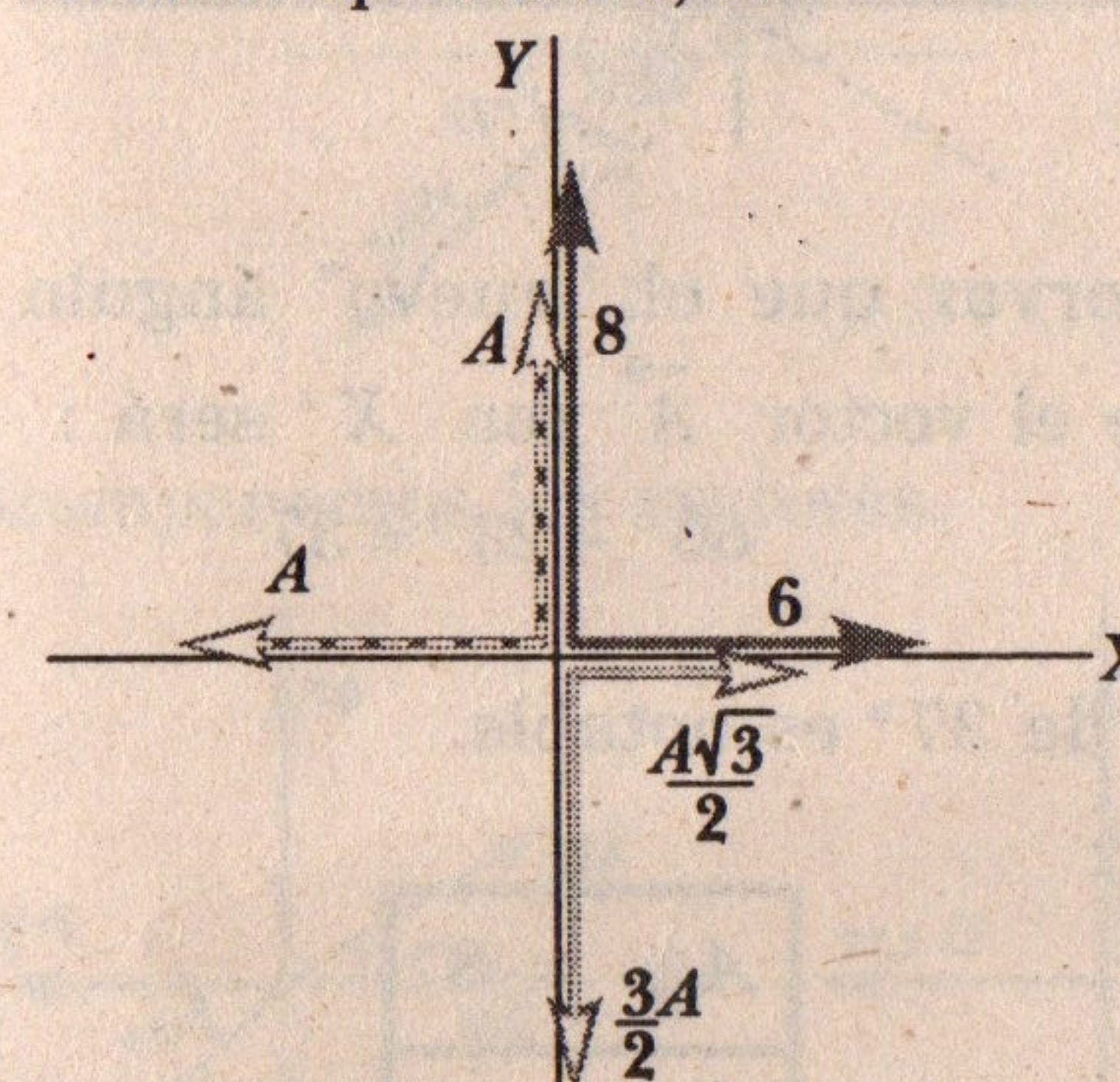
PROBLEMA 103

En el sistema mostrado determine el módulo del vector resultante, el cual se encuentra a lo largo del eje *X*.

A) $(2\sqrt{3} - 10)\,\hat{i}$ B) $8\sqrt{3}\,\hat{i}$

C) $(8\sqrt{3} - 10)\,\hat{i}$ D) $(10 + 4\sqrt{3})\,\hat{i}$

E) $16\,\hat{i}$

RESOLUCIÓN

Hallamos las componentes cartesianas de cada vector.

Los vectores quedaran, así :

Nos dicen que la resultante esta sobre el eje "X" luego la resultante sobre el eje "Y" es cero.

Es decir : $\vec{R}_y = \vec{0}$

$$A + 8 = \frac{3}{2}A$$

$$\therefore \quad A = 16$$

La resultante será :

$$\vec{R} = \vec{R}_x = \left(6 + 16\frac{\sqrt{3}}{2} - 16\right)\hat{i}$$

$$\boxed{\vec{R}_x = (8\sqrt{3} - 10)\,\hat{i}}$$

Clave: C

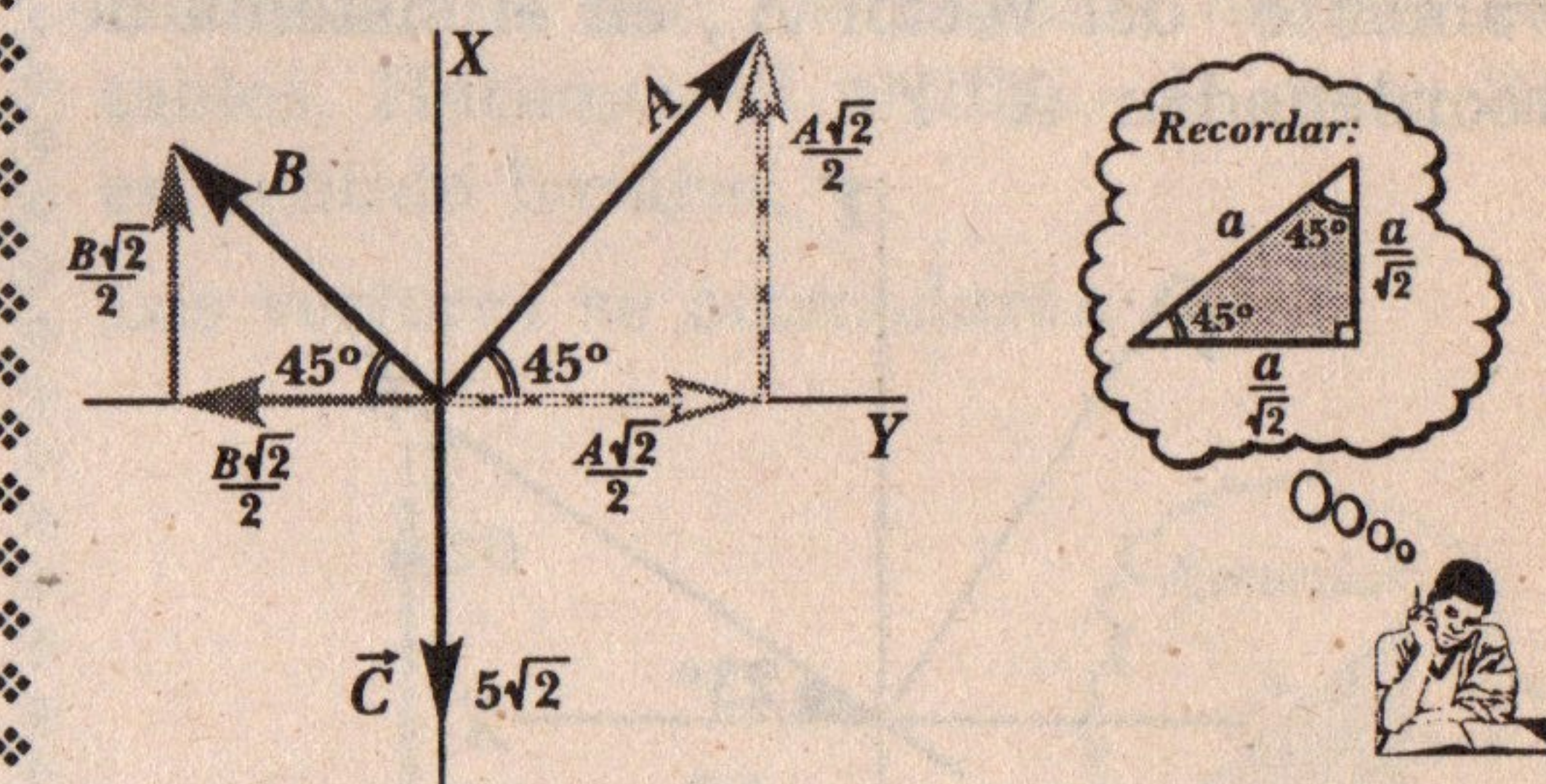
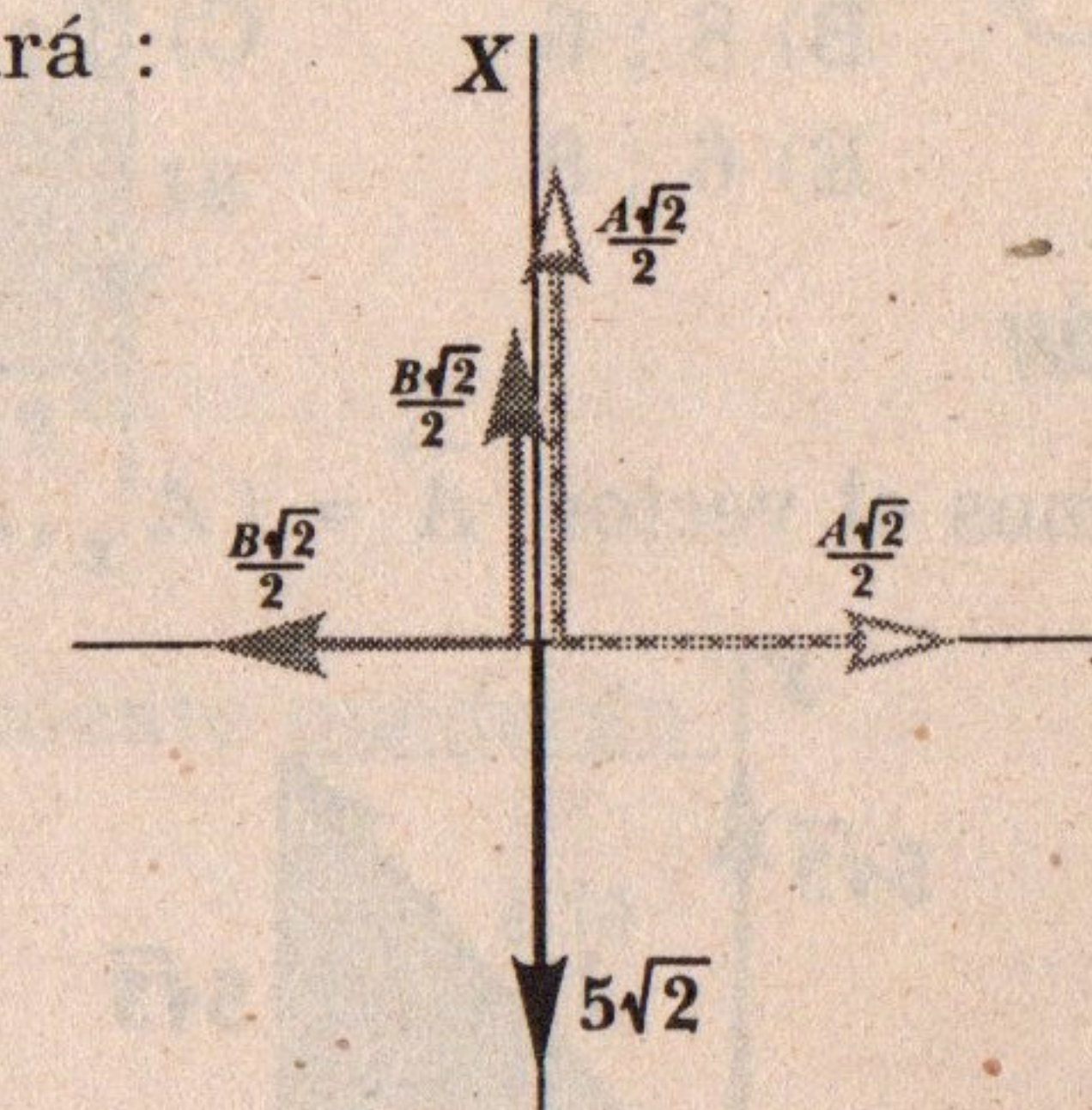
PROBLEMA 104 (Sem. CEPRE-UNI 98-I)

La figura muestra tres vectores en el plano *XY*. Si el vector resultante tiene componente "X" igual a $3\sqrt{2}$ y componente "Y" igual a $7\sqrt{2}$, entonces $|\vec{A}|$ y $|\vec{B}|$, son respectivamente :

A) 15 ; 1 B) 3 ; 5 C) 5 ; 1

D) 14 ; 2 E) 1 ; 15

RESOLUCIÓN

Descomponemos vectores en los ejes cartesianos.

Quedará :

Datos :

$$R_x = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{B\sqrt{2}}{2} + \frac{A\sqrt{2}}{2} - 5\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$B + A = 16 \quad \ldots (I)$$

$$R_y = 7\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A\sqrt{2}}{2} - \frac{B\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$$

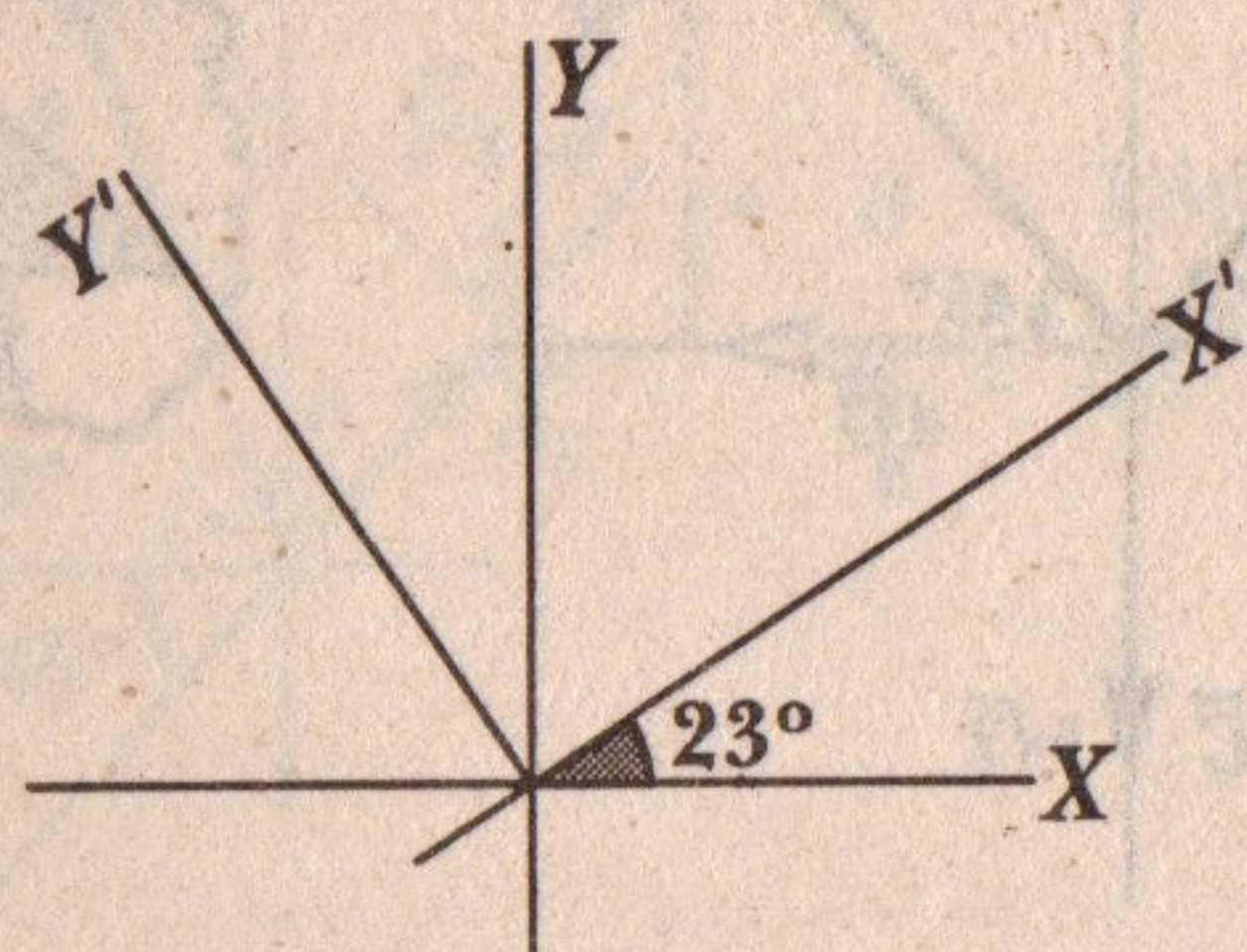
$$A - B = 14 \quad \text{... (II)}$$

Resolviendo de (I) y (II) :

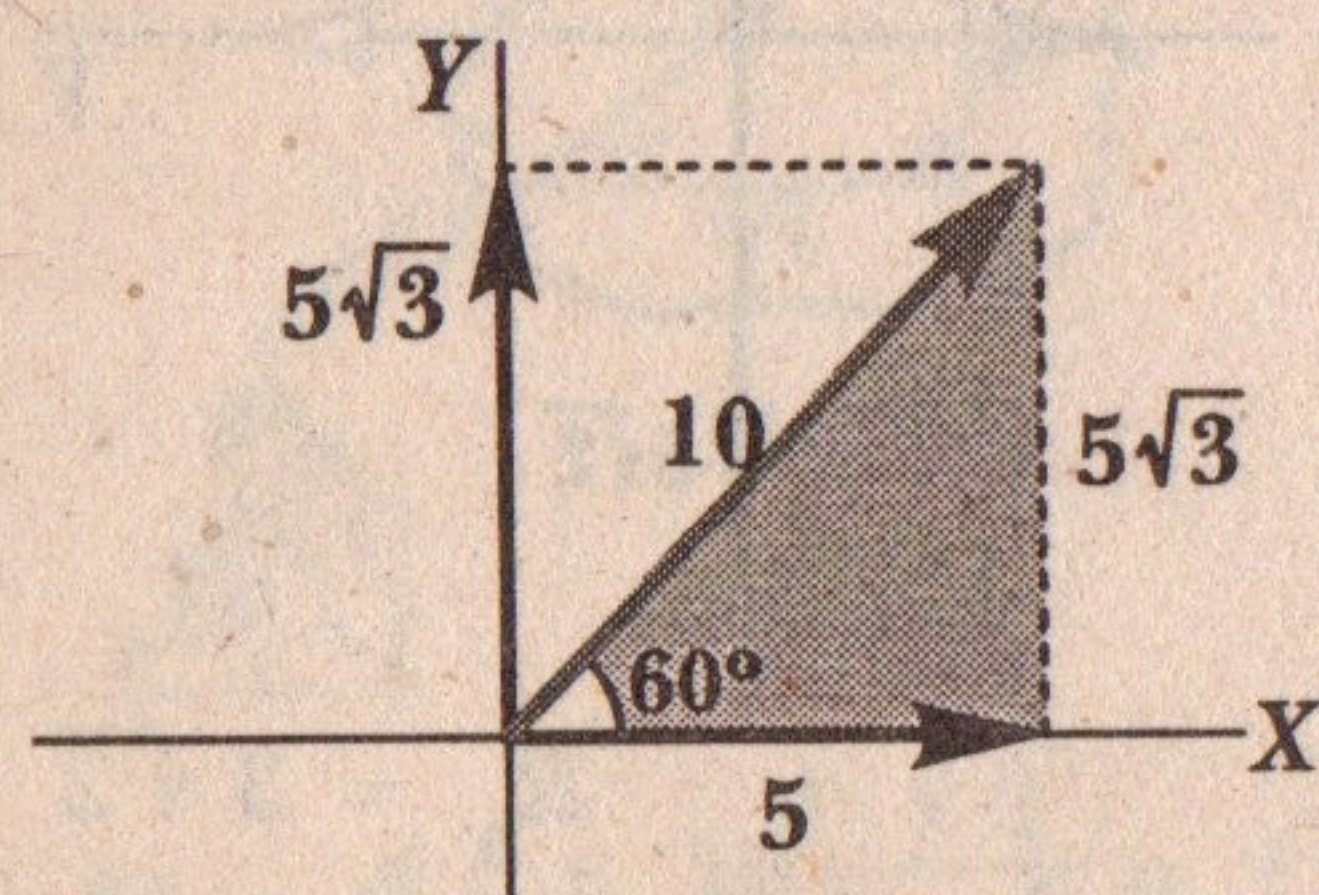
$A = 15$
$B = 1$

Clave: A

PROBLEMA 105

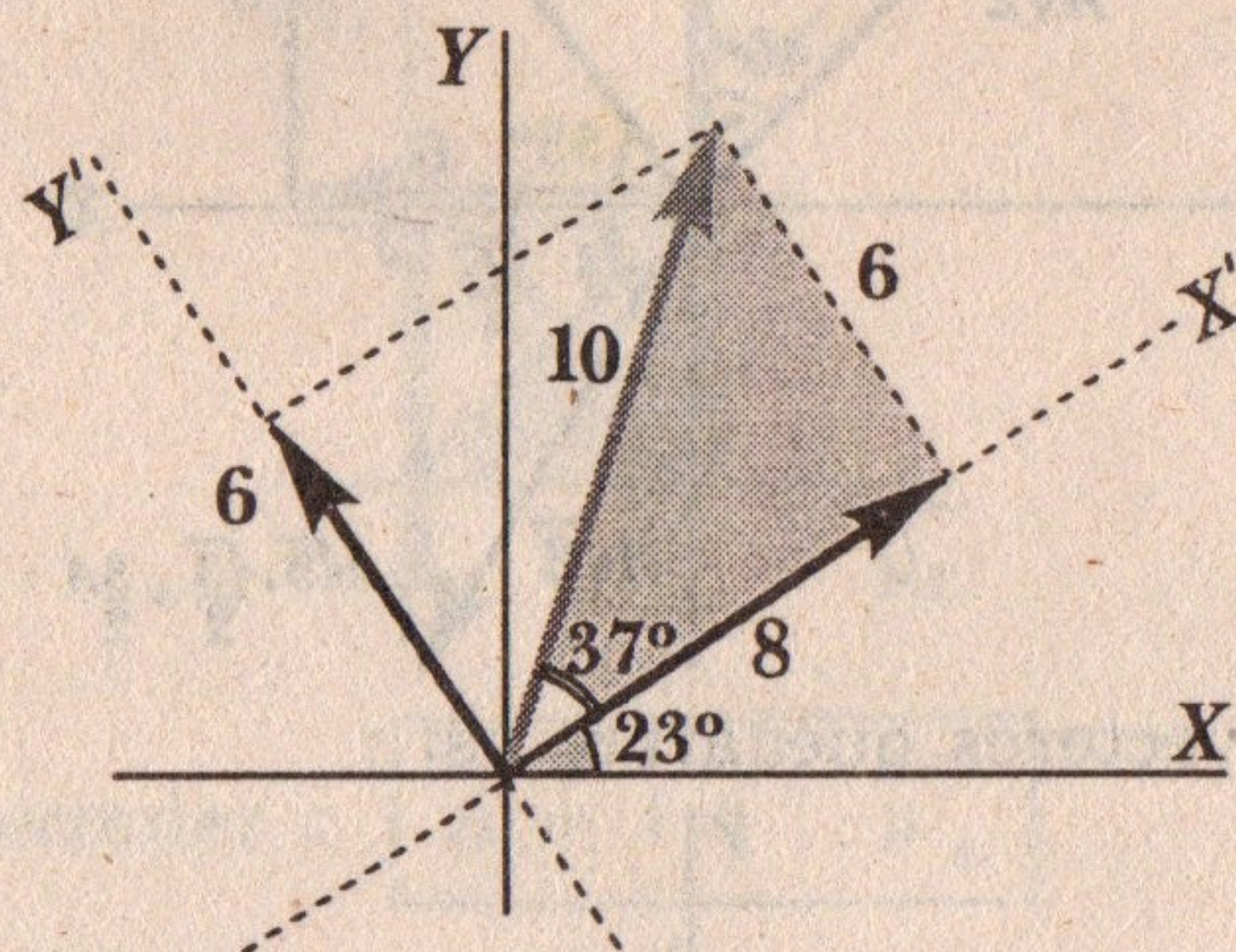
Si las componentes rectangulares de un vector $\vec{A}$ en el sistema de coordenadas X e Y son $A_x = 5$ y $A_y = 5\sqrt{3}$, hallar las componentes $A_{x'}$ y $A_{y'}$ respectivamente del vector $\vec{A}$, en el sistema de coordenadas $X'Y'$.

A) 10 ; 6 B) 8 ; 6 C) 3 ; 4
D) 10 ; 8 E) 6 ; 8

RESOLUCIÓN

Supongamos el vector $\vec{A} = (A_x, A_y)$

* Notamos ◺ notable :

* $\vec{A} = (5, 5\sqrt{3})$

Luego : $A = 10$

Nos piden las componentes en el nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$

* Observar que el "nuevo" ángulo que hace el vector $\vec{A}$ con X' será :

$$60° - 23° = 37°$$

* ◺ de 37° es notable.

Luego :

$A_{x'} = 8$
$A_{y'} = 6$

Clave: B

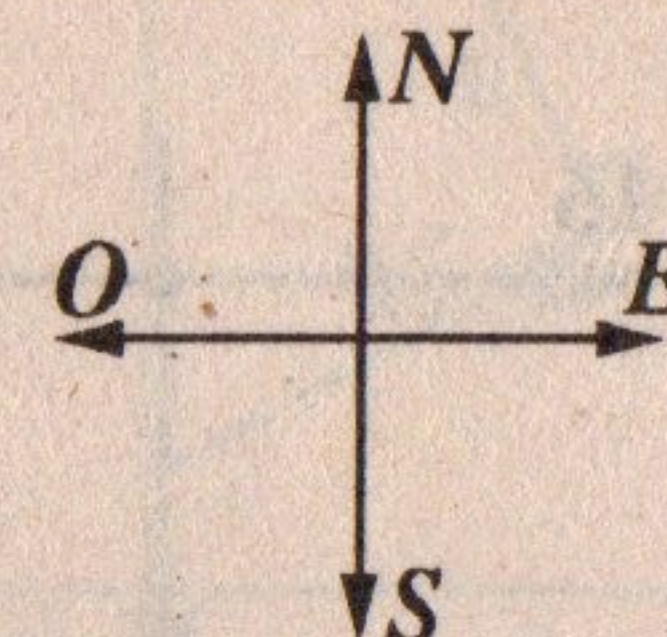
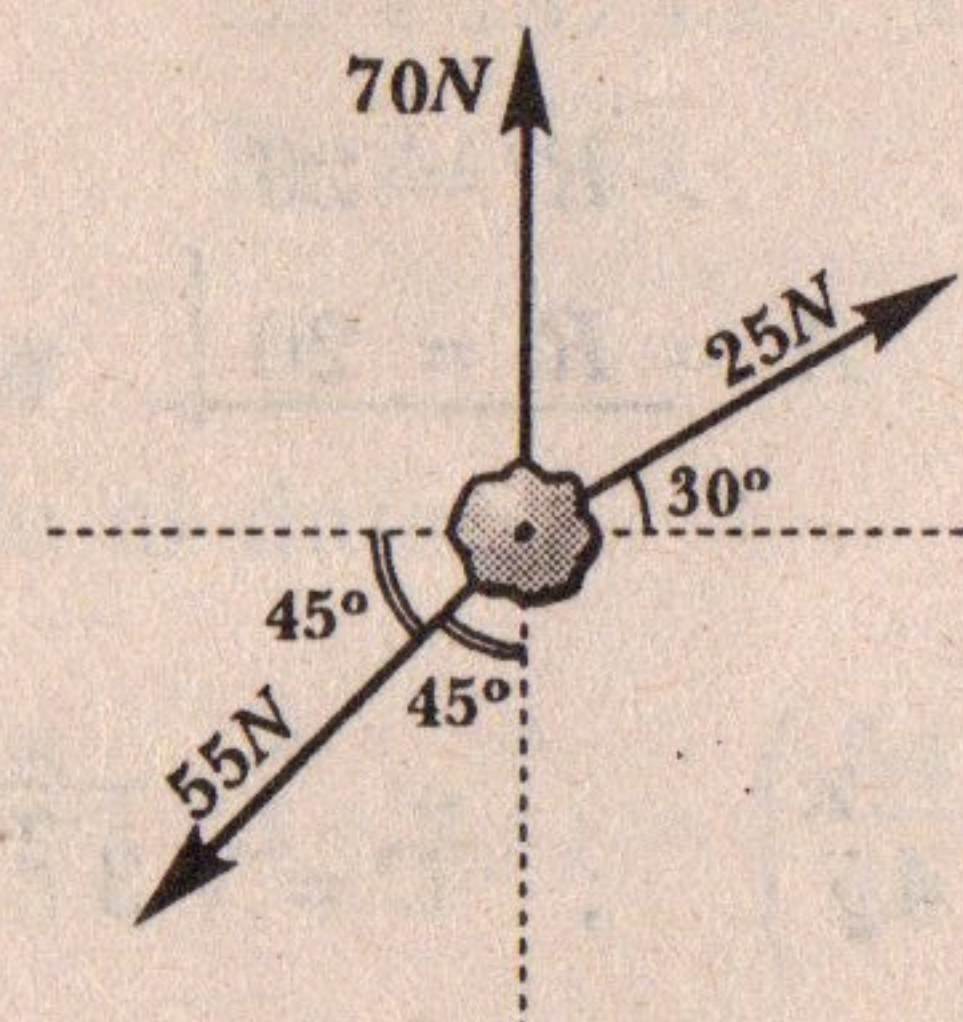
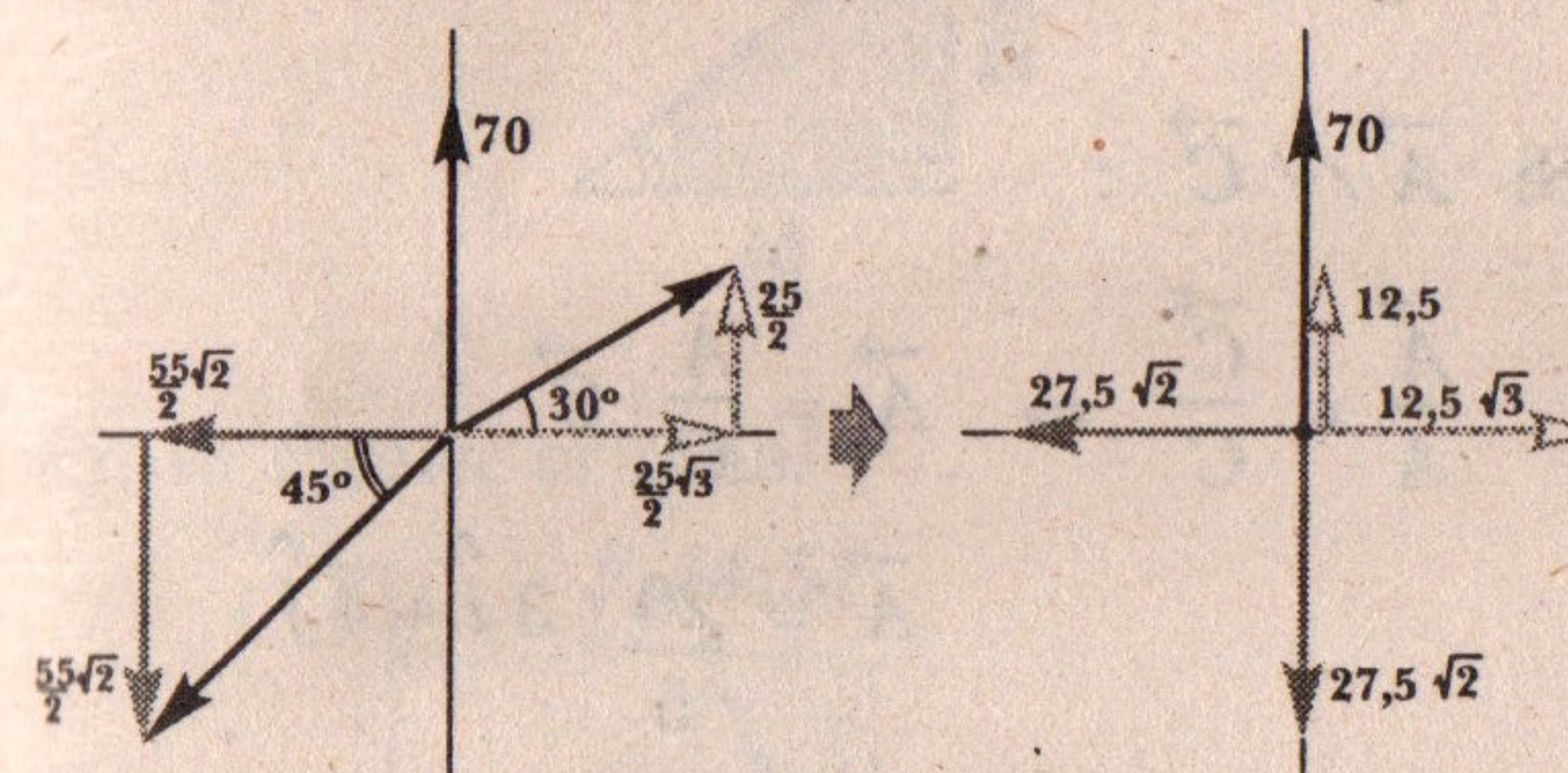
PROBLEMA 106

Sobre un cuerpo actúan 3 fuerzas : el módulo de $\vec{F}_1$ es 25 N y actúa en la dirección de 30° al Norte del Este, el módulo de $\vec{F}_2$ es 70 N y actúa hacia el Norte.

La magnitud de $\vec{F}_3$ es 55N y actúa hacia el Sur Oeste. ¿Cuál es la magnitud de la resultante?

A) 60N B) 30N
C) 46,89N D) 43,61N
E) 10N

RESOLUCIÓN

Si los puntos cardinales fueran :

Graficamos :

Descomponemos los vectores.

Las resultantes en cada eje serán :

$$R_x = 12{,}5\sqrt{3} - 27{,}5\sqrt{2}$$

$$R_x = -17{,}24$$

$$R_y = 70 + 12{,}5 - 27{,}5\sqrt{2}$$

$$R_y = 43{,}61$$

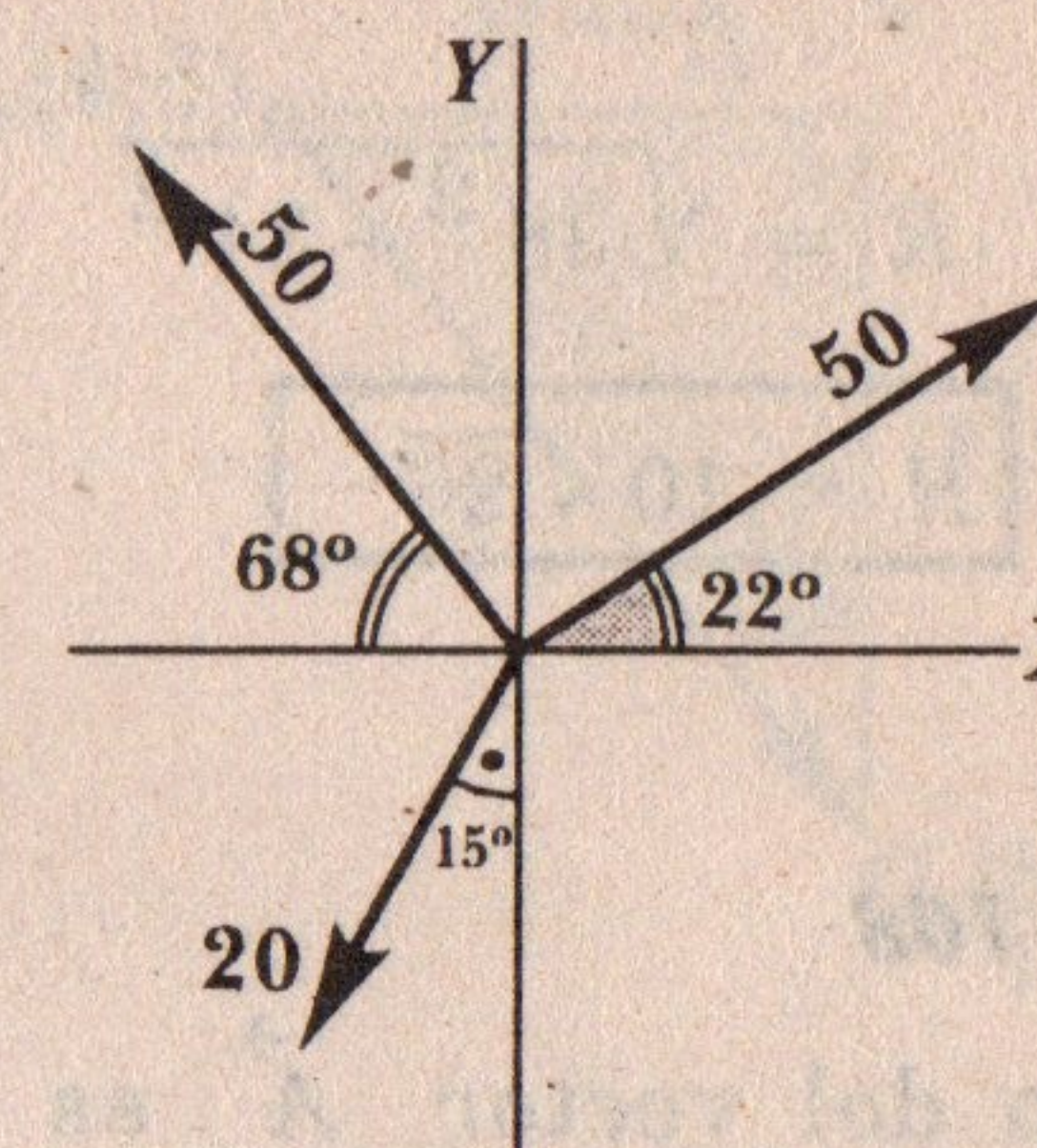
La resultante será :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\therefore \boxed{R = 46{,}89}$$

Clave: C

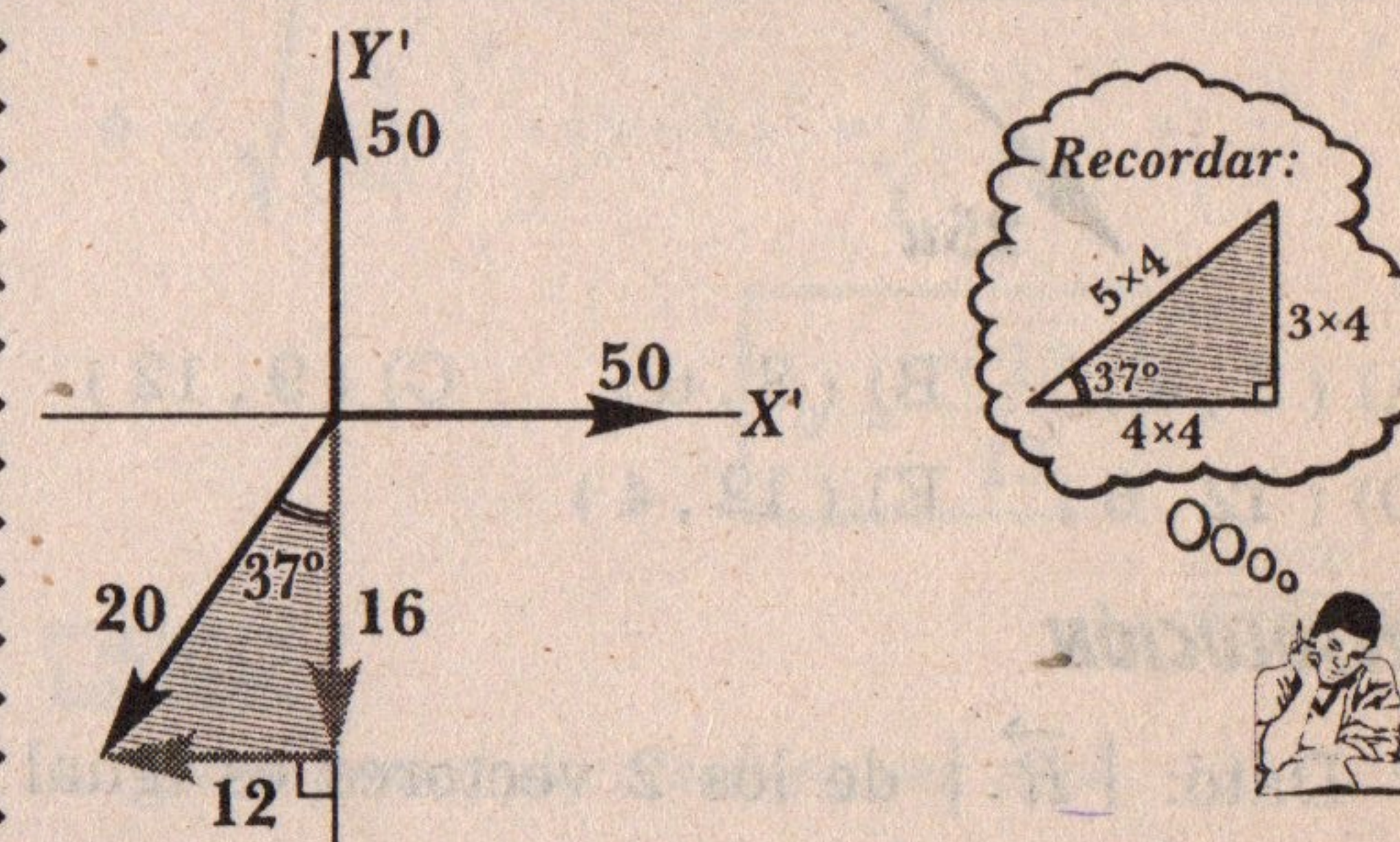
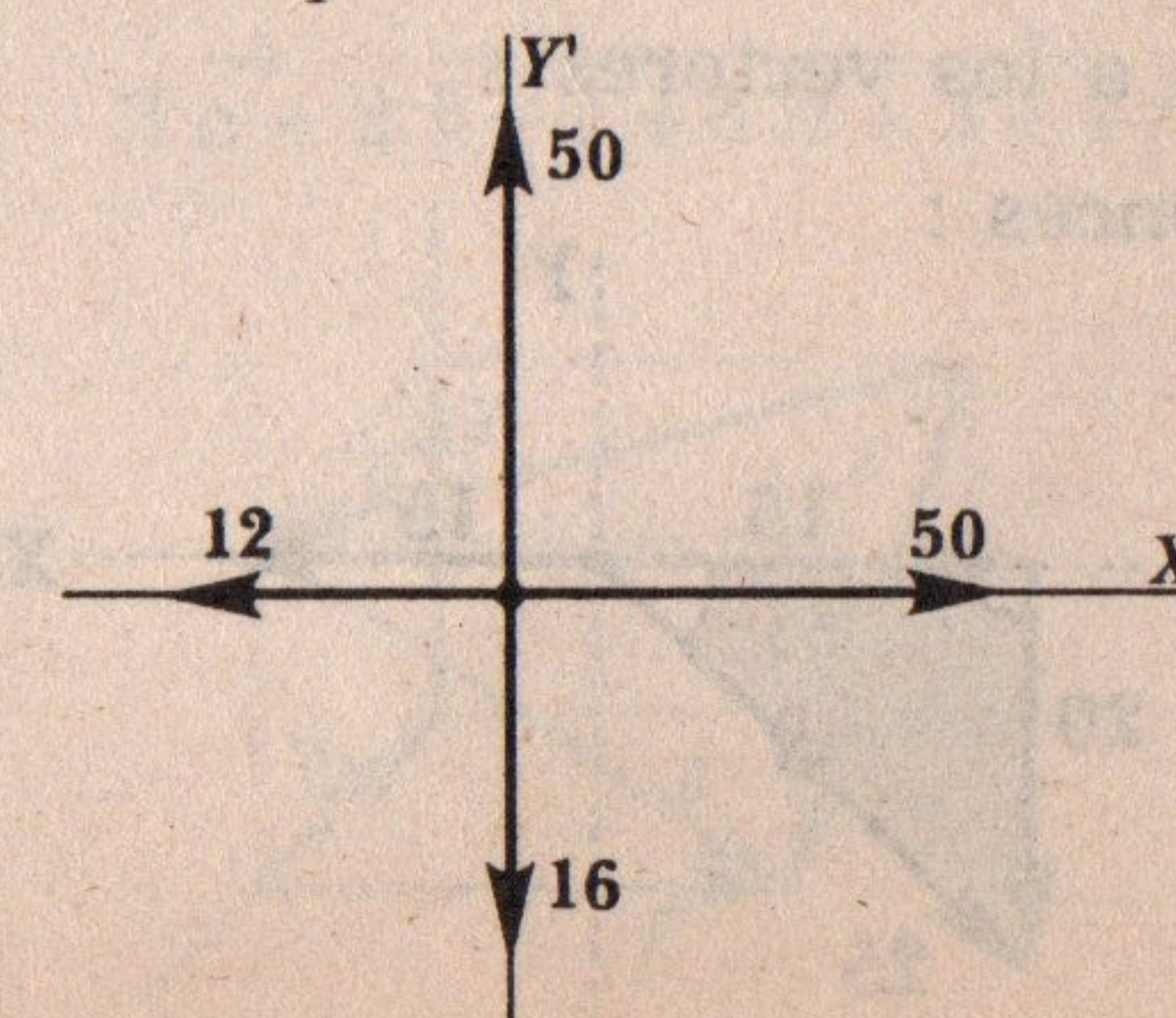
PROBLEMA 107

En el sistema mostrado, hallar el módulo del vector resultante.

A) $\sqrt{26}$ B) $10\sqrt{13}$ C) $6\sqrt{2}$
D) $10\sqrt{26}$ E) $2\sqrt{26}$

RESOLUCIÓN

Observamos que los ángulos no son notables. Hacemos el artificio de girar 22° en sentido horario.

Los vectores se acomodarán así :

Recordar:

Finalmente quedarán :

$R_x = 50 - 12 = 38$

$R_y = 50 - 16 = 34$

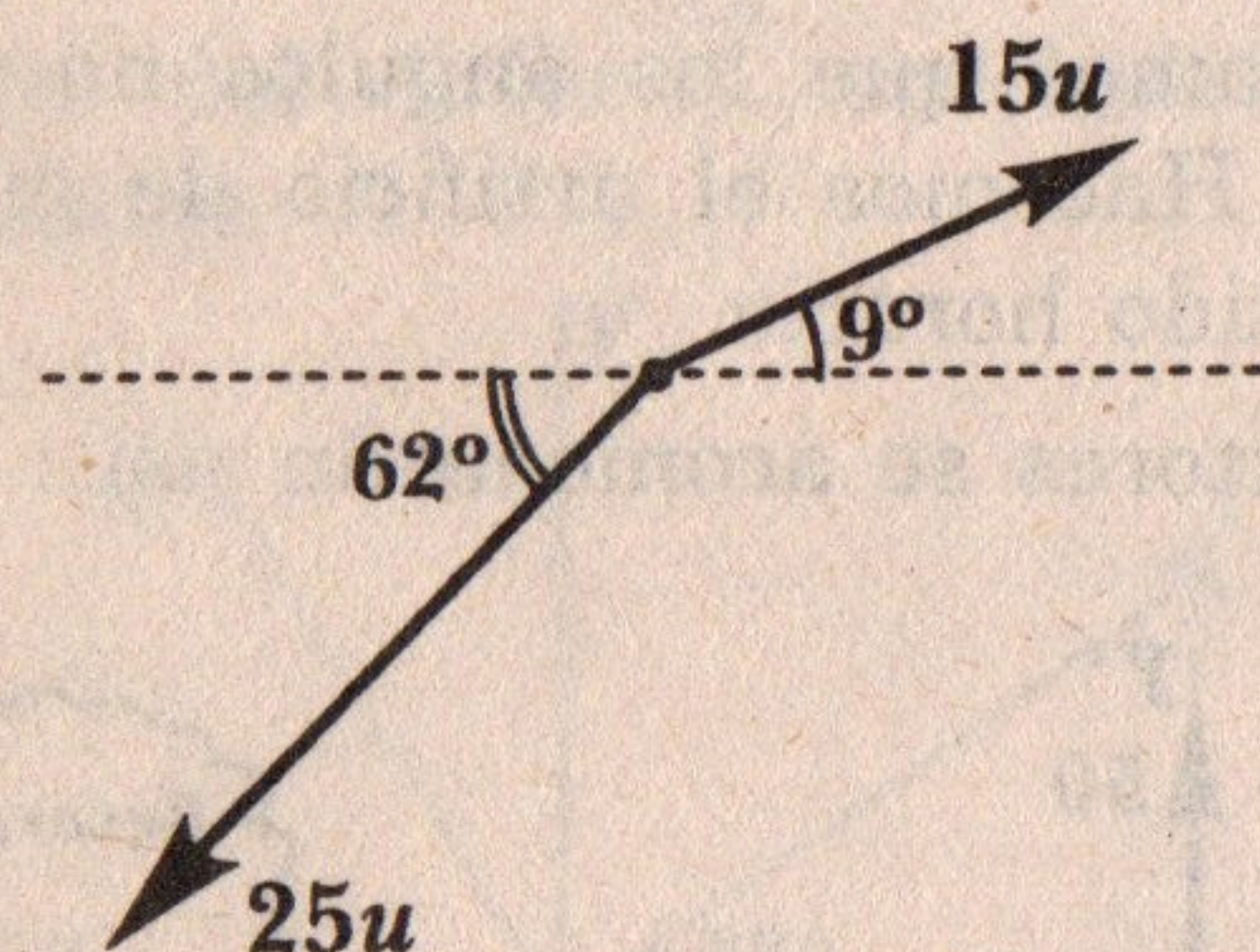
$R = \sqrt{38^2 + 34^2}$

$\boxed{R = 10\sqrt{26}}$

Clave: D

PROBLEMA 108

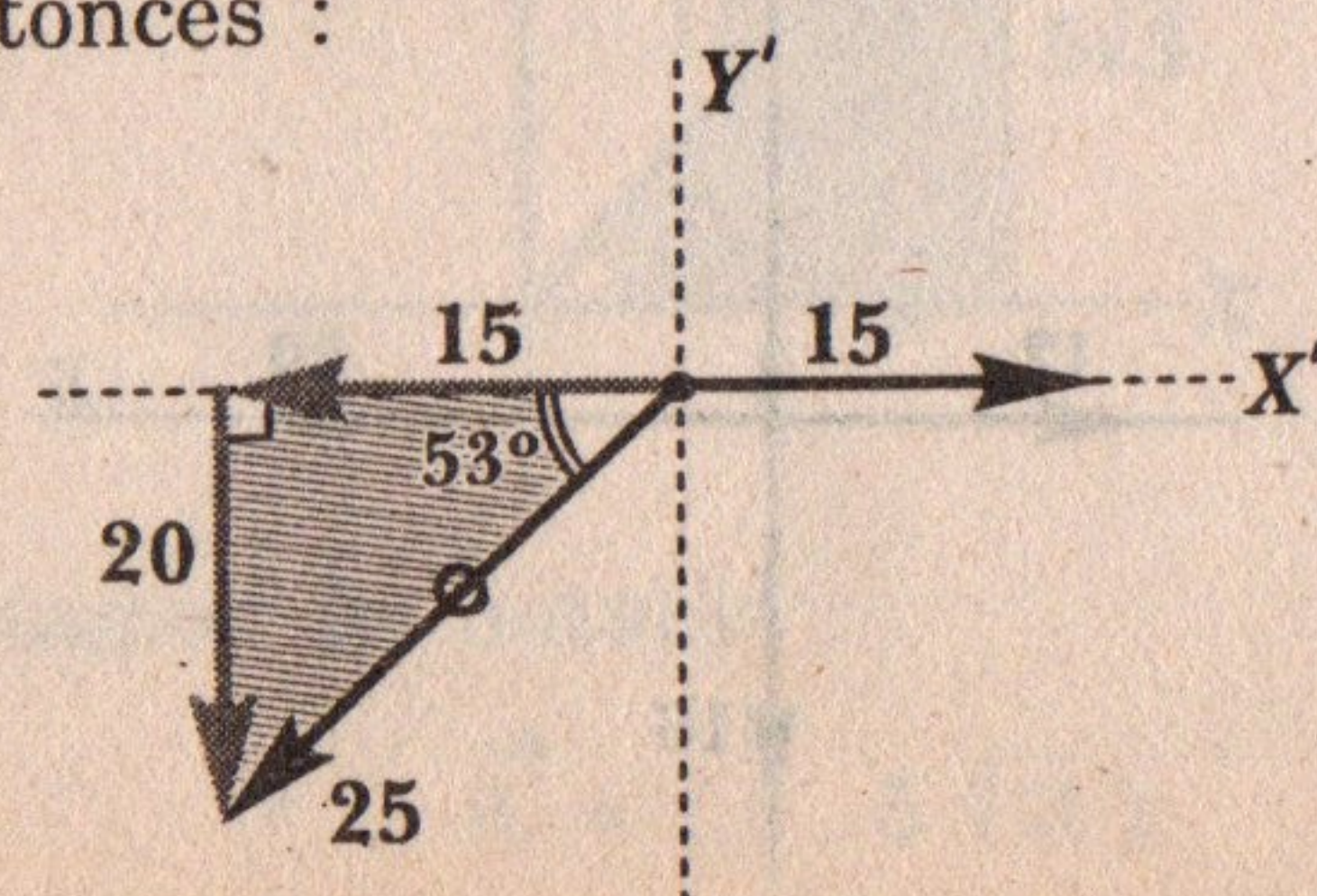
El módulo del vector $\vec{A}$ es igual al módulo de la resultante de los vectores mostrados en la figura, además el vector $\vec{A}$ es paralelo al vector $\vec{C} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$. Hallar $\vec{A}$.

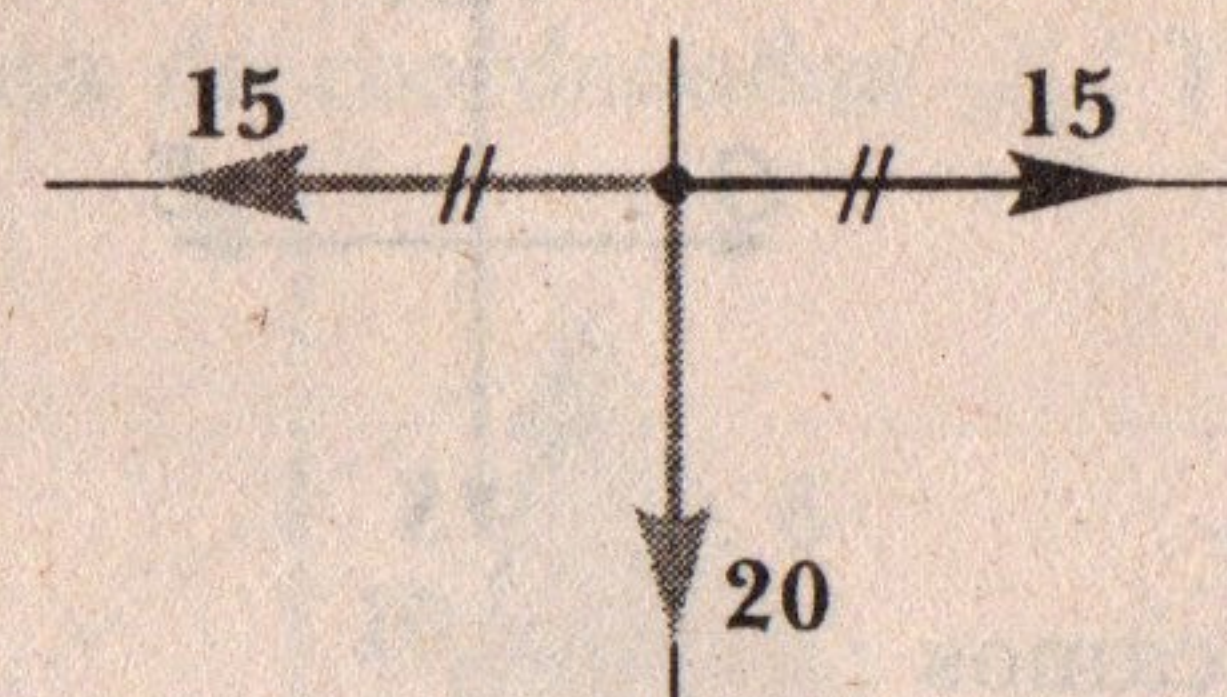
15u, 9°, 62°, 25u

A) (3 , 4) B) (8 , 6) C) (9 , 12)
D) (12 , 6) E) (12 , 4)

RESOLUCIÓN

* Dato: $|\vec{R}|$ de los 2 vectores es igual a $|\vec{A}|$.
* Hacemos girar 9° en sentido horario a los vectores.

Entonces :

Y', X', 15, 15, 53°, 20, 25

Descomponemos el vector de 25 unidades.

Queda : 15, 15, 20

$\therefore\ R = 20$

Luego : $A = R = 20$ (dato)

además :

$\vec{C} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$; $C = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Nos piden $\vec{A} = ??$

Si $\vec{A} // \vec{C}$:

$\frac{\vec{A}}{A} = \frac{\vec{C}}{C} \Rightarrow \vec{A} = \frac{A}{C} \cdot \vec{C}$

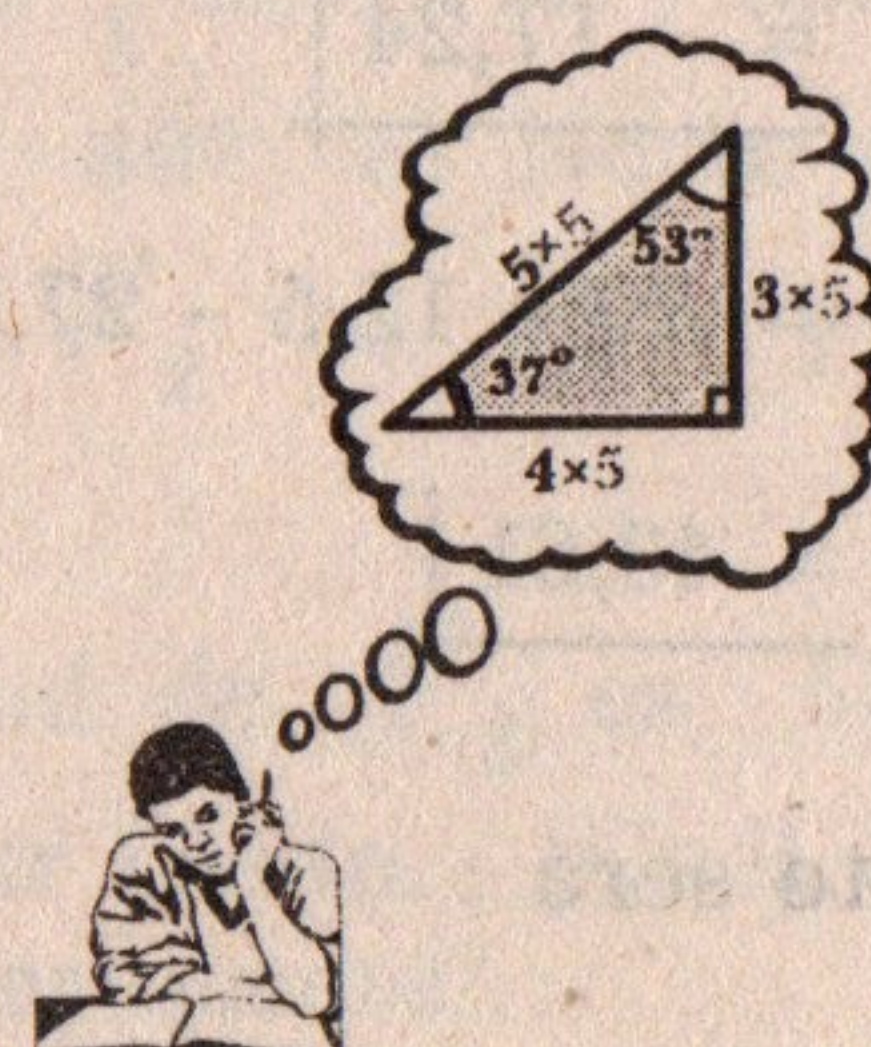
$\vec{A} = \frac{20}{5}(3\hat{i} + 4\hat{j})$

$\vec{A} = 12\hat{i} + 4\hat{j}$

$\therefore\ \boxed{\vec{A} = (12\ ,\ 4)}$

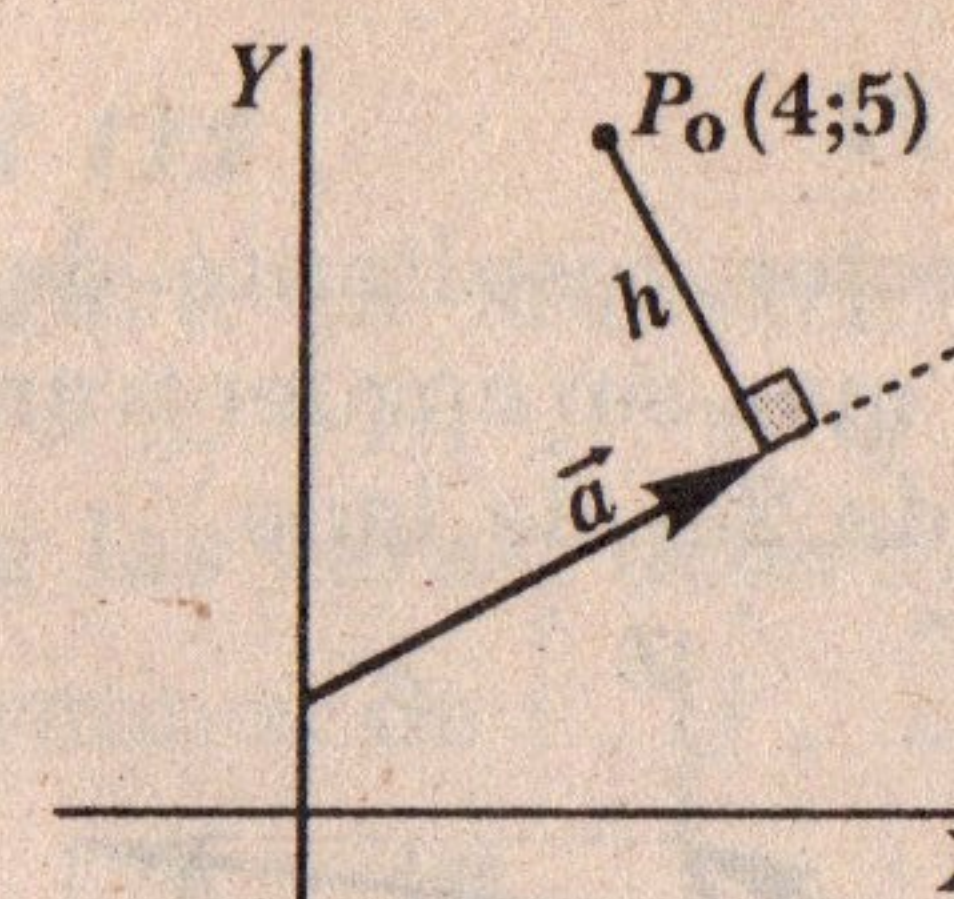
Clave: E

Recuerde :

53°, 5×5, 3×5, 37°, 4×5

PROBLEMA 109

Hallar la distancia "h" en la figura mostrada, si :

$\vec{a} = (18/13)(3\hat{i} + 2\hat{j})\ m$

Y, $P_0(4;5)$, h, $\vec{a}$, X

A) $\sqrt{18}$ B) $\sqrt{13}/13$ C) $\sqrt{13}$
D) $18/\sqrt{3}$ E) $2/\sqrt{13}$

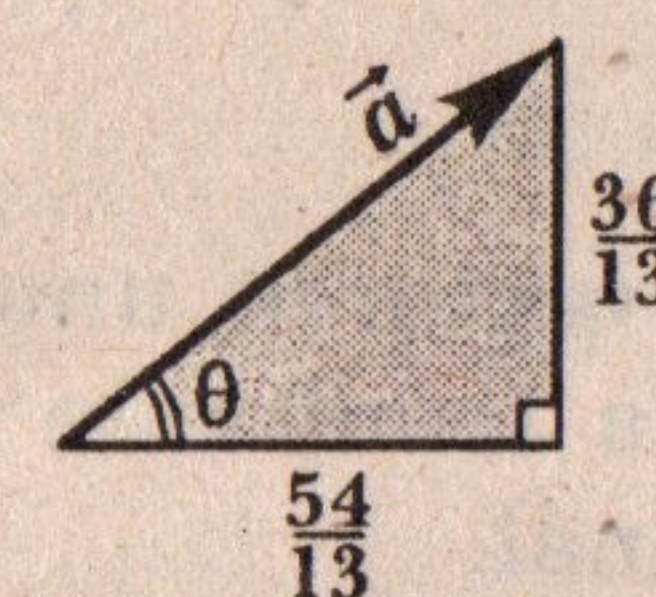
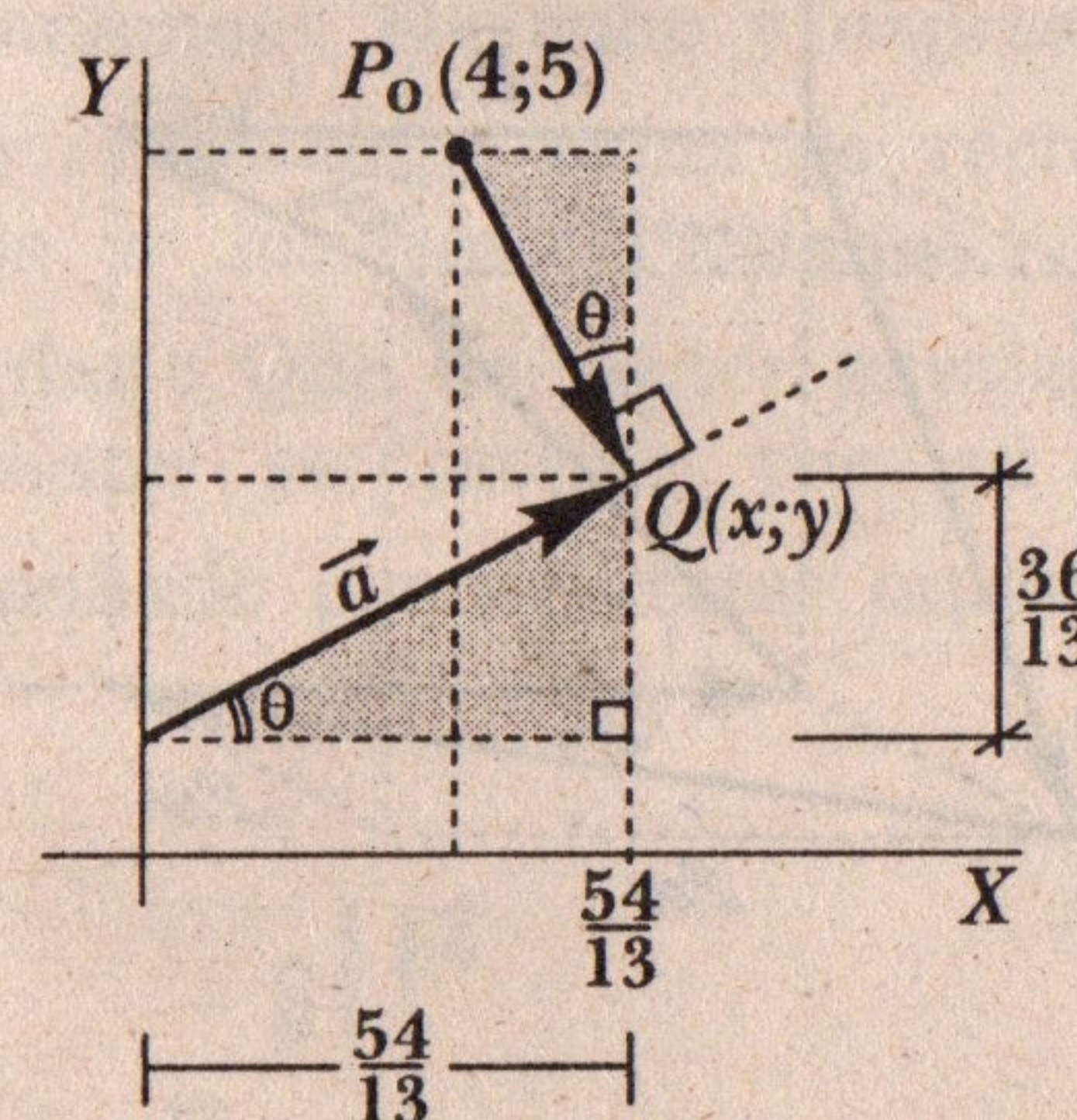
RESOLUCIÓN

De acuerdo al dato :

$\vec{a} = \frac{18}{13}(3\hat{i} + 2\hat{j}) = \left(\frac{54}{13}, \frac{36}{13}\right)$

$\vec{a}$, θ, $\frac{36}{13}$, $\frac{54}{13}$

En la figura original :

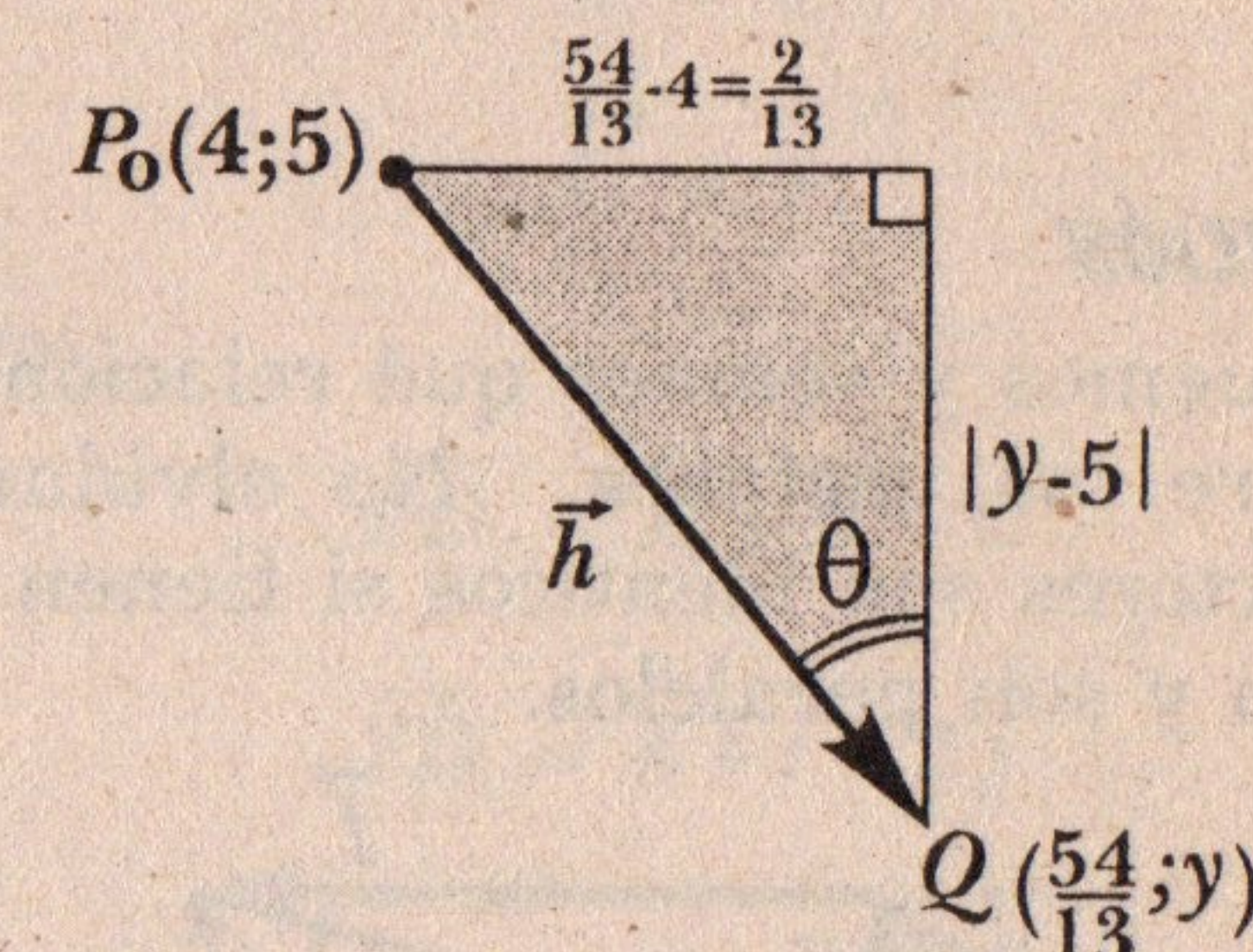
Y, $P_0(4;5)$, θ, $Q(x;y)$, $\vec{a}$, θ, $\frac{36}{13}$, $\frac{54}{13}$, X, $\frac{54}{13}$

* Observamos , punto " Q " :

$x = \frac{54}{13}$

* Observamos también "θ" se repite en los triángulos sombreados.

$tg\,\theta = \frac{36/13}{54/13} = \frac{2}{3}$

* Si "x" es conocido , graficamos el ◺ superior

$\frac{54}{13} - 4 = \frac{2}{13}$, $P_0(4;5)$, $\vec{h}$, θ, $|y-5|$, $Q\left(\frac{54}{13};y\right)$

* $tg\,\theta = \frac{2}{3} = \frac{2/13}{|y-5|}$

$\therefore\ |y-5| = \frac{3}{13}$

* Como $5 > y \Rightarrow y - 5 = -\frac{3}{13}$
* Nos piden "h" :

$h = \sqrt{\left(\frac{2}{13}\right)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{13}\right)^2 + \left(\frac{3}{13}\right)^2}$

$\therefore\ \boxed{h = \frac{\sqrt{13}}{13}}$

Clave: B

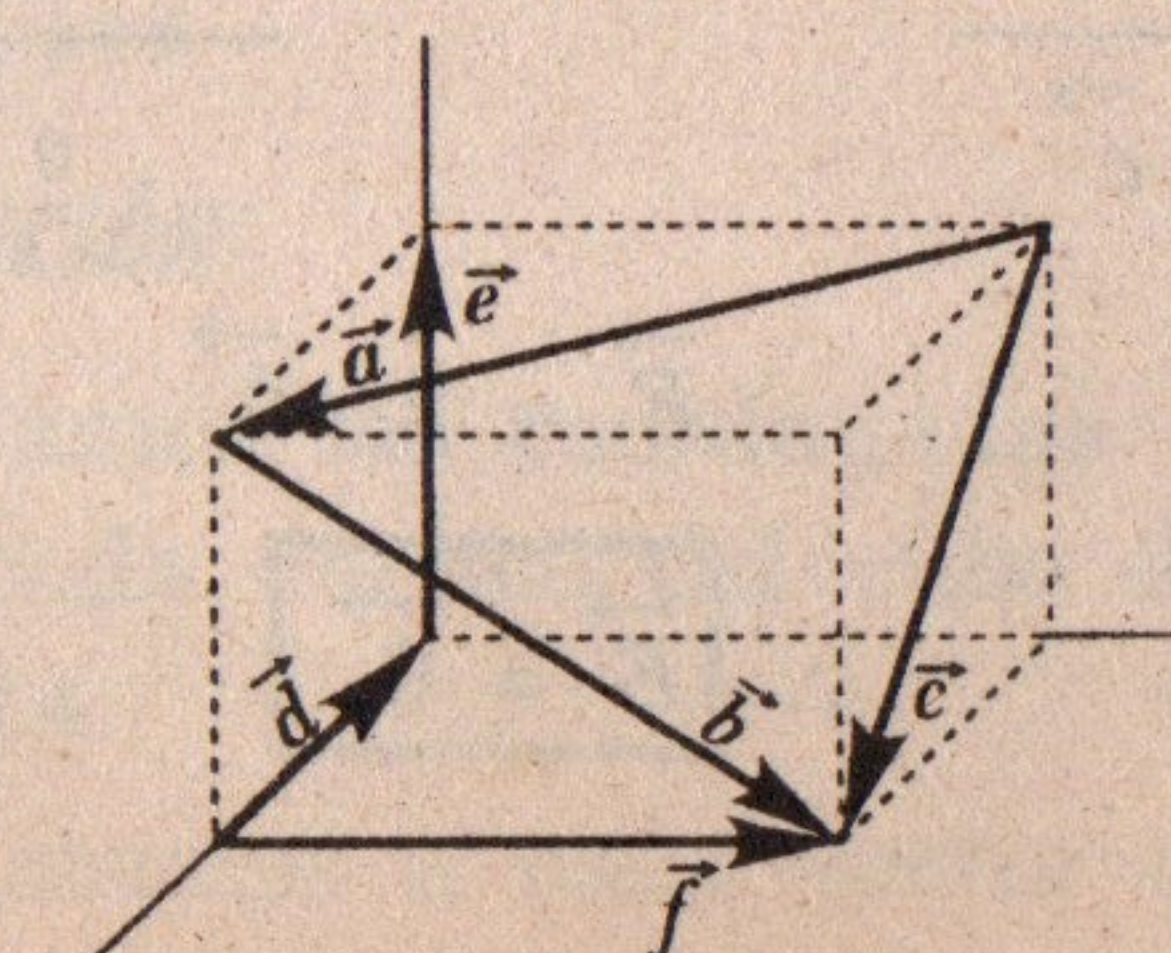
Nota:

Otra forma de resolver, ver prob. 131

PROBLEMA 110

De la figura mostrada, hallar el vector :

$3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} + 4\vec{d} + 3\vec{e} + \vec{f}$

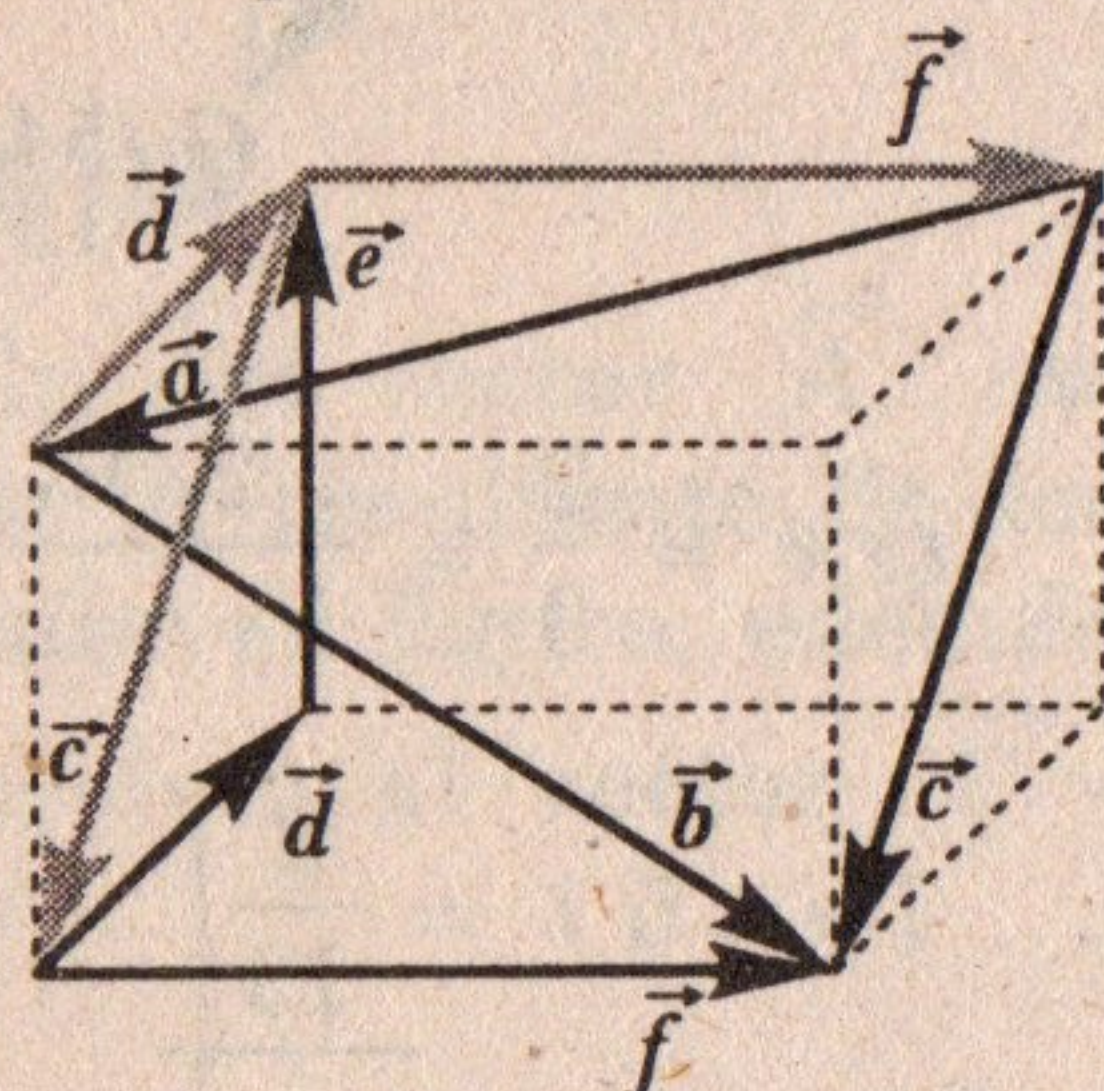
$\vec{a}$, $\vec{e}$, $\vec{d}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{f}$

A) $2\vec{a}$ B) $\vec{0}$

C) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ D) b y c

E) 0

RESOLUCIÓN

Grafiquemos y veamos qué relación existe entre los vectores. No olvidar que dos vectores son idénticos si tienen igual módulo y son paralelos.

* $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

* $\vec{d}+\vec{e}+\vec{c}=\vec{0}$

* $\vec{a}+\vec{d}+\vec{f}=\vec{0}$

Nos piden :

$$\vec{E}=3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}+4\vec{d}+3\vec{e}+\vec{f}$$

Desdoblando :

$$\vec{E}=\underbrace{(\vec{a}+\vec{d}+\vec{f})}_{0}+\underbrace{(\vec{d}+\vec{e}+\vec{c})}_{0}+2(\vec{a}+\vec{b})+2\vec{e}+2\vec{d}$$

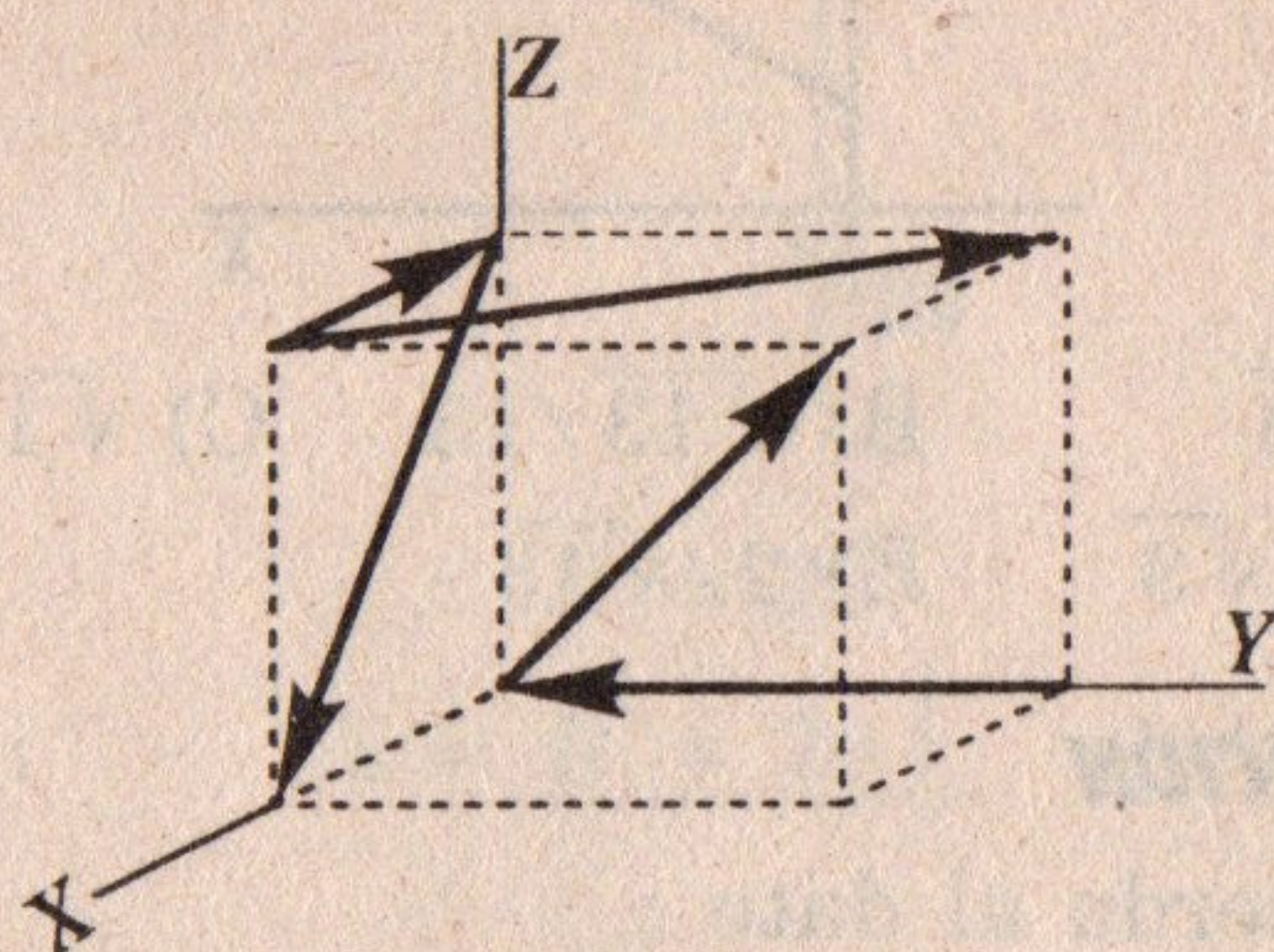
$$\vec{E}=2(\underbrace{\vec{a}+\vec{b}}_{\vec{c}}+\vec{e}+\vec{d})=2(\underbrace{\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}}_{0})$$

$$\vec{E}=2\times\vec{0}$$

$$\therefore\ \boxed{\vec{E}=\vec{0}}$$

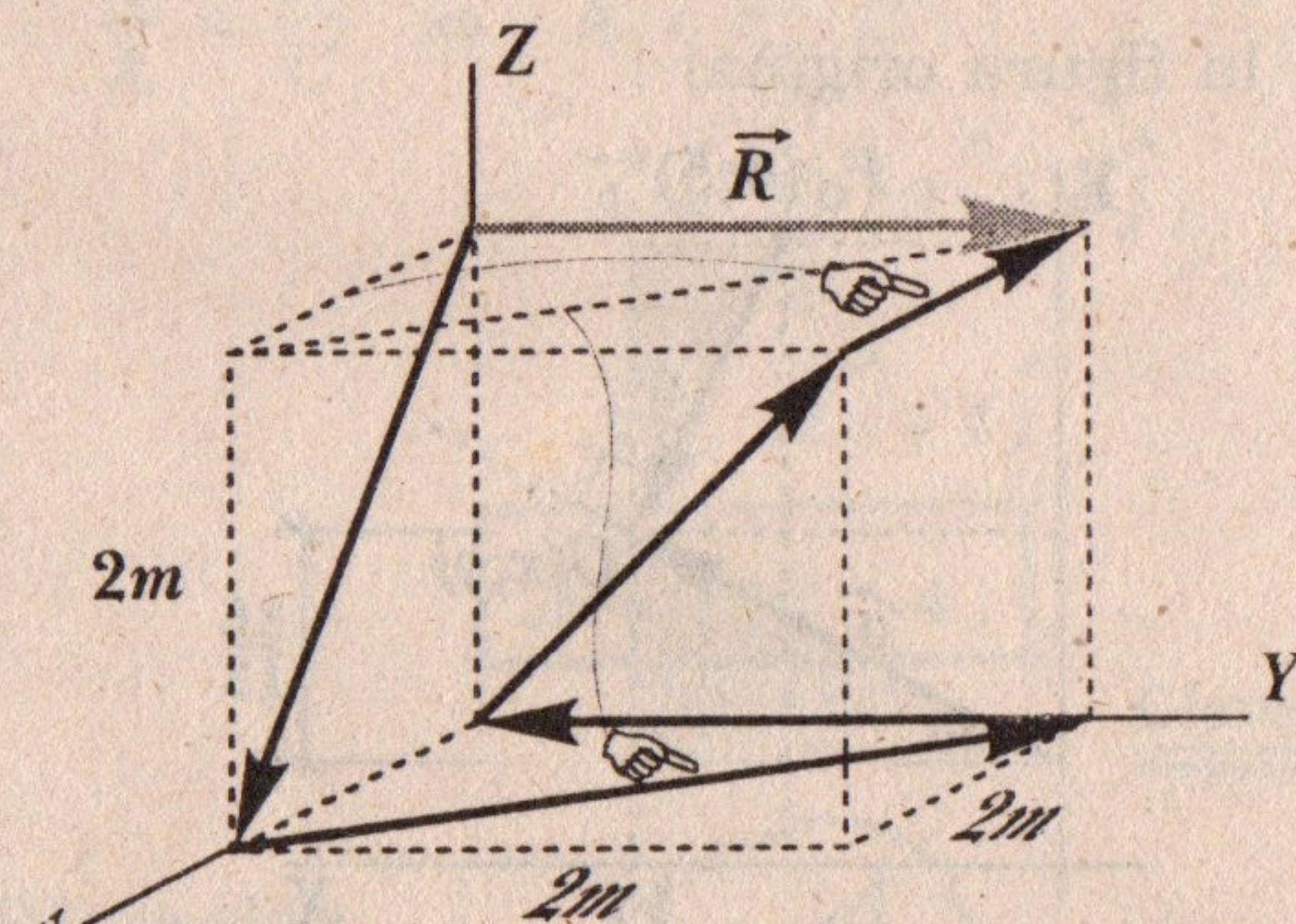
Clave: B

PROBLEMA 111

Hallar el vector resultante del conjunto de vectores que se encuentran acotados por el cubo de $2m$ de lado.

A) $4\hat{j}\ m$ B) $\vec{0}$ C) $2\hat{k}\ m$

D) $2\hat{j}\ m$ E) $2\hat{i}\ m$

RESOLUCIÓN

Ubicamos los vectores uno a continuación del otro, la resultante une el punto inicial con el final.

Observamos la resultante "$\vec{R}$" es paralela al eje "Y", como el cubo es de $2m$ de arista.

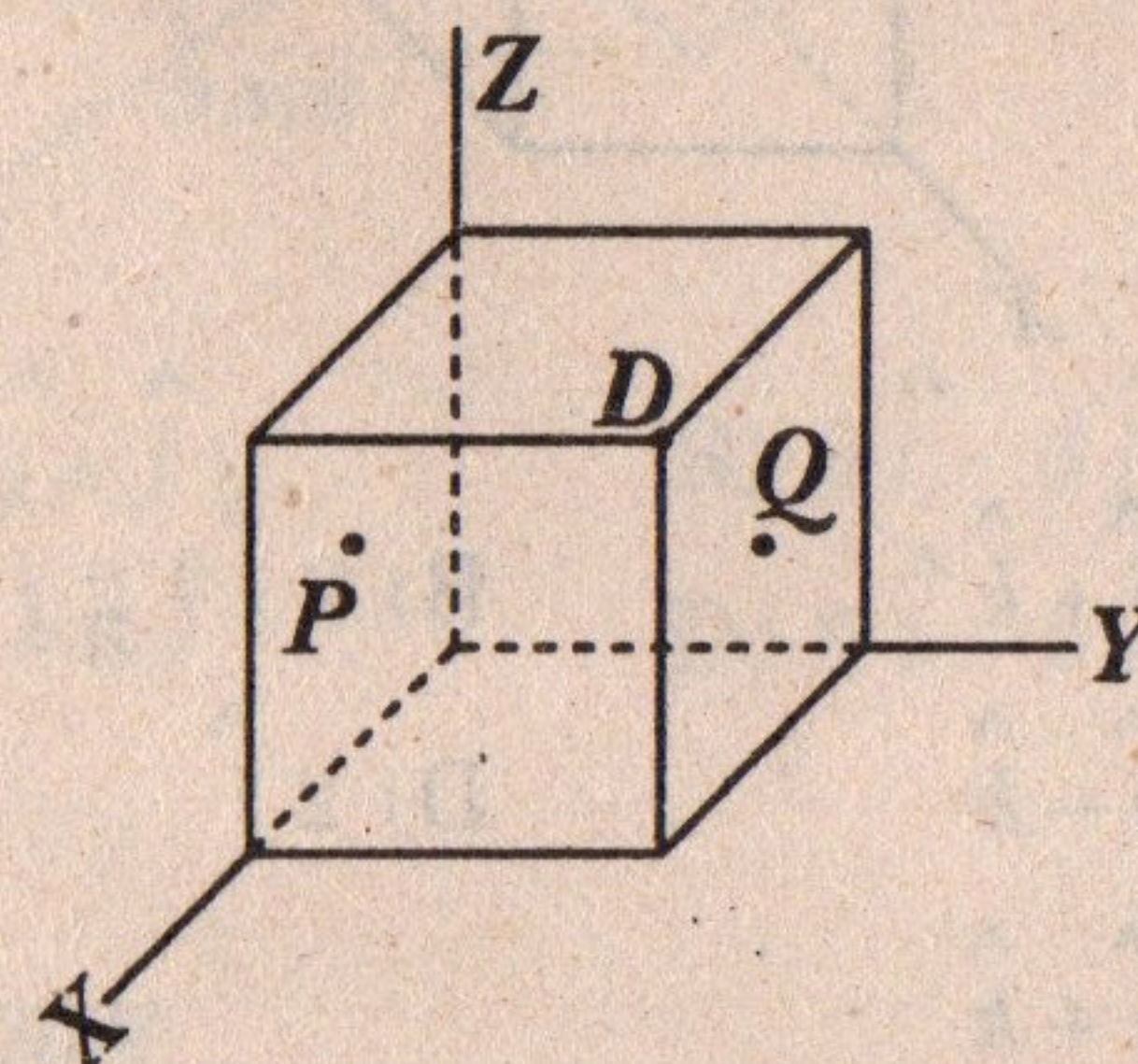
$$\therefore\ \boxed{\vec{R}=(2\hat{j})\ m}$$

Clave: D

Nota:

Otra forma de resolver, ver prob. 113

PROBLEMA 112

En la figura se muestra un cubo de arista $a=2$. Si P y Q son puntos medios de las caras, determine el vector $\vec{PD}$ en términos de $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$.

A) $\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ B) $\hat{i}+2\hat{j}$

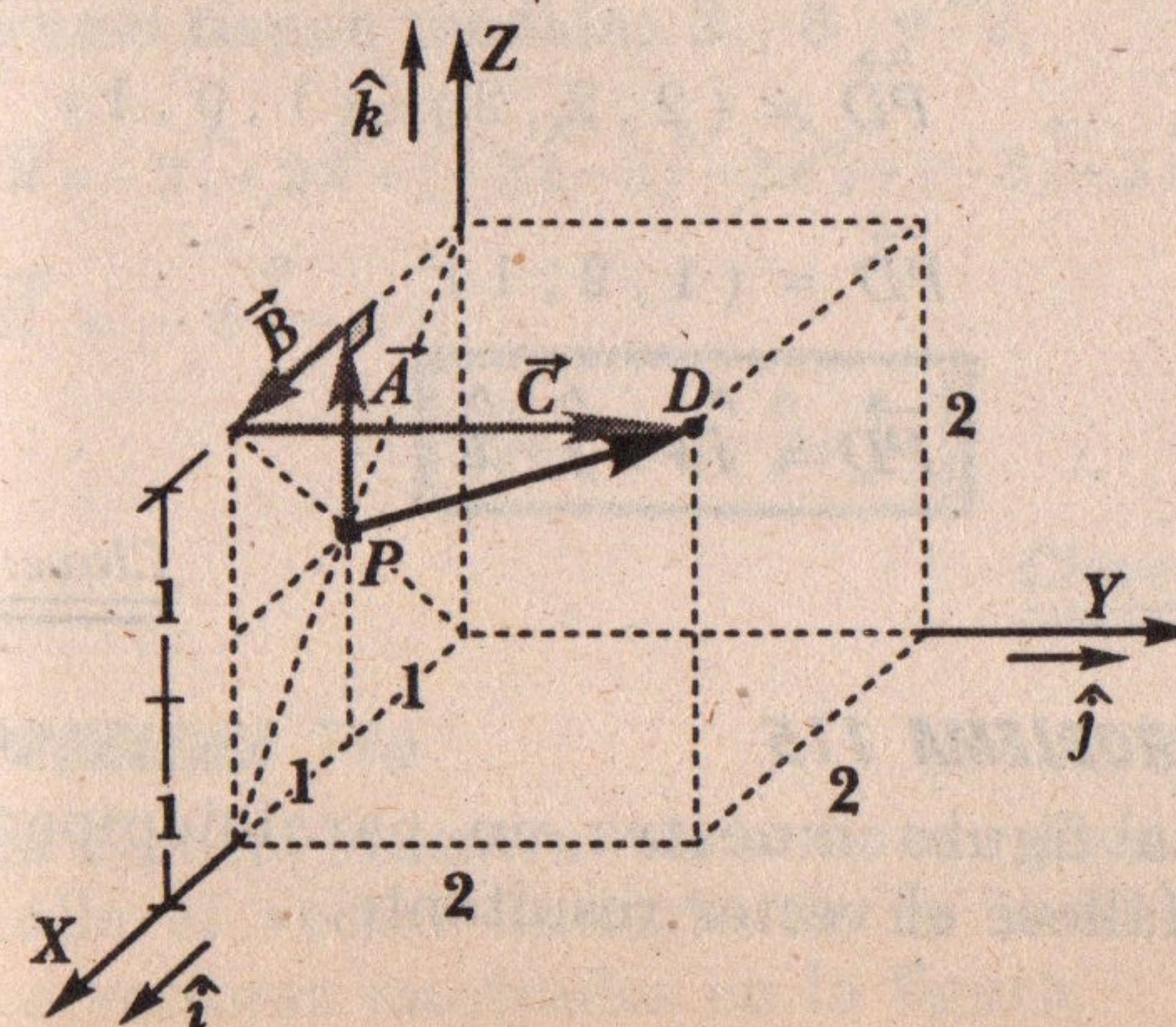
C) $\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ D) $2\hat{j}$

E) $\hat{k}+2\hat{i}+\hat{j}$

RESOLUCIÓN

Redibujamos el cubo y expresamos el vector $\vec{PD}$ como suma de vectores paralelos a los ejes cartesianos.

Recordar : Que un vector paralelo al eje cartesiano se escribe por su módulo acompañado por su vector unitario ($\hat{i}$, $\hat{j}$ ó $\hat{k}$)

Así :

$$\vec{A}=\hat{k}$$

$$\vec{B}=\hat{i}$$

$$\vec{C}=2\hat{j}$$

Luego :

$$\vec{PD}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$$

$$\vec{PD}=\hat{k}+\hat{i}+2\hat{j}$$

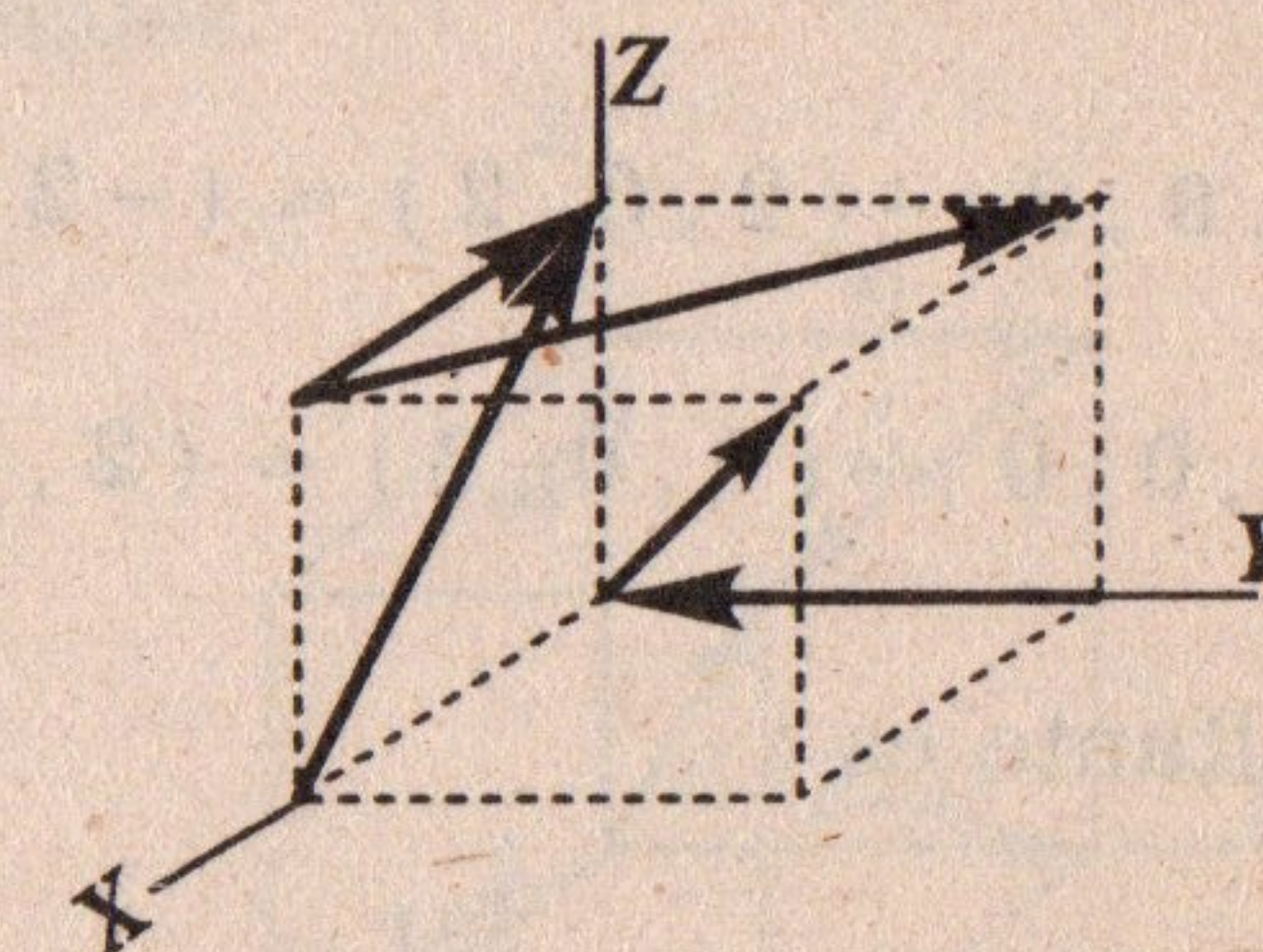
$$\therefore\ \boxed{\vec{PD}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}}$$

Clave.: A

Nota:

Otra forma de solución, ver prob. 114

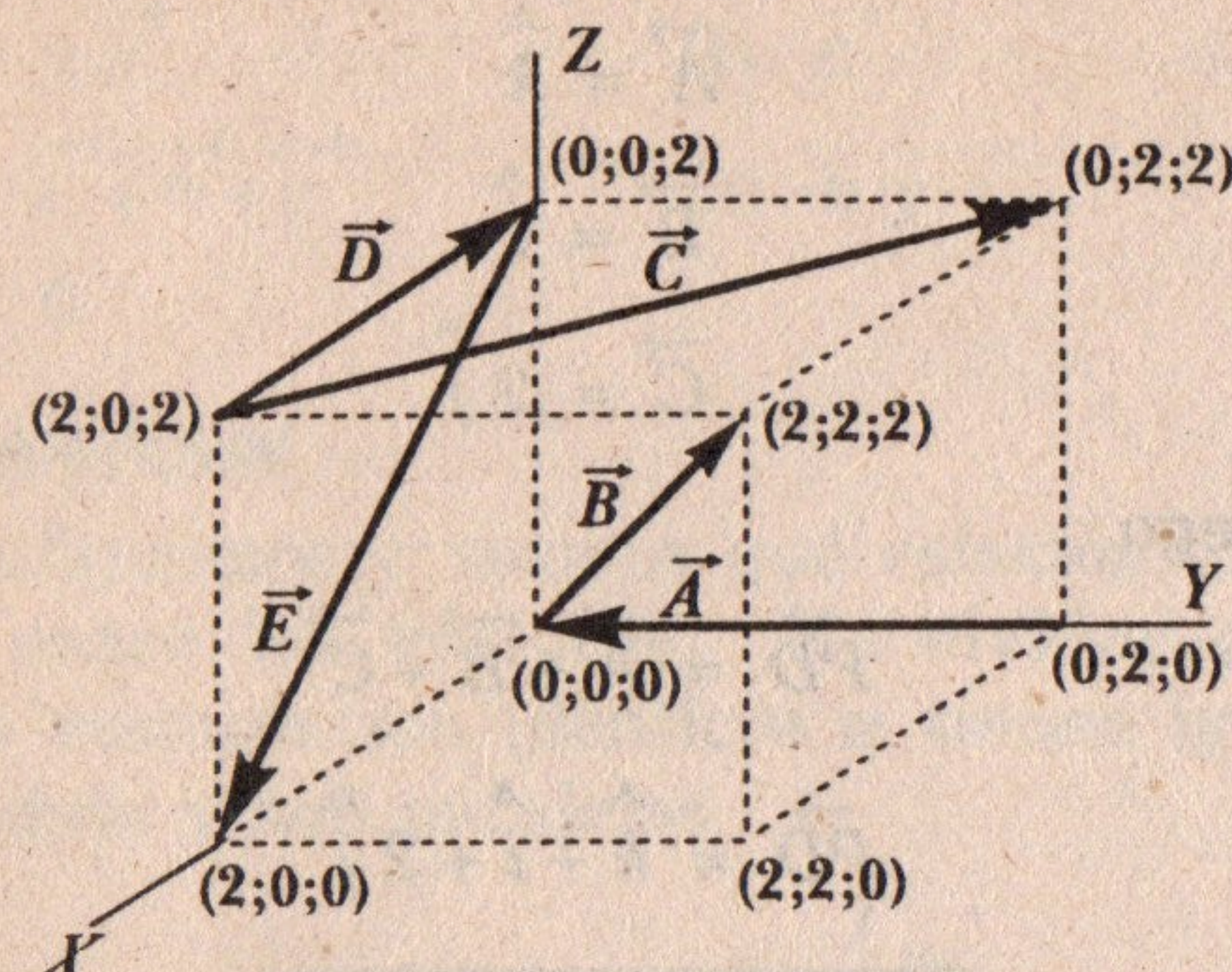
PROBLEMA 113 (Sem. CEPRE-UNI 97-II)

Hallar el vector resultante del conjunto de vectores mostrados en el cubo de $2\ m$ de lado.

A) $(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})\ m$ B) $(2\hat{i}+\hat{j})\ m$

C) $(2\hat{k})\ m$ D) $(2\hat{j})\ m$

E) $(2\hat{i})\ m$

RESOLUCIÓN

* Hallamos las coordenadas cartesianas de cada vértice del cubo de $2m$ de arista.
* Denotamos a cada vector con una letra.

Recuerde : El vector se define restando las coordenadas final e inicial.

Así :

$\vec{A} = (0,0,0) - (0,2,0) = (0,-2,0)$

$\vec{B} = (2,2,2) - (0,0,0) = (2,2,2)$

$\vec{C} = (0,2,2) - (2,0,2) = (-2,2,0)$

$\vec{D} = (0,0,2) - (2,0,2) = (-2,0,0)$

$\vec{E} = (2,0,0) - (0,0,2) = (2,0,-2)$

La resultante es :

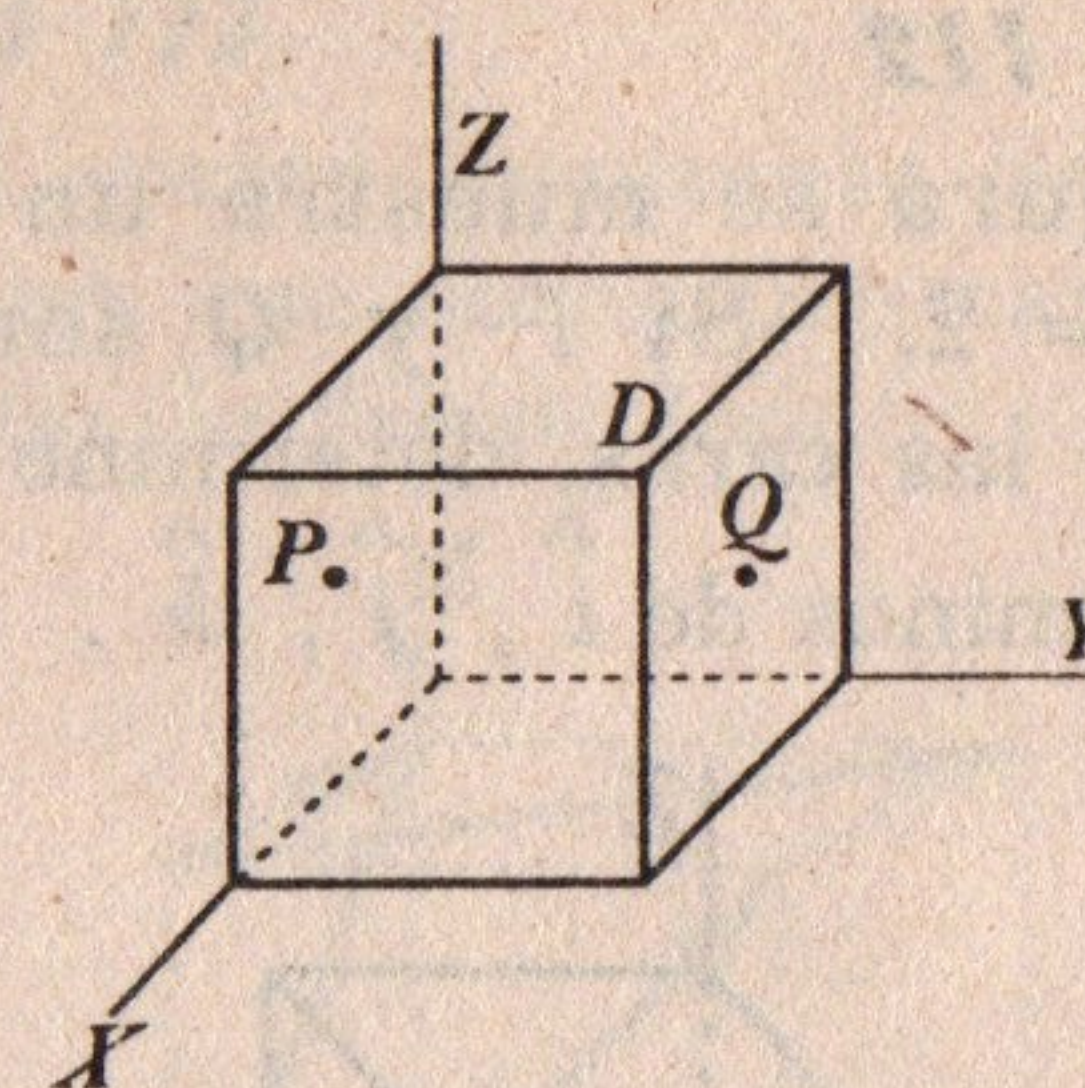
$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$$

$$\vec{R} = (0,2,0) = 0\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\therefore \boxed{\vec{R} = (2\hat{j})\ m}$$

Clave: D

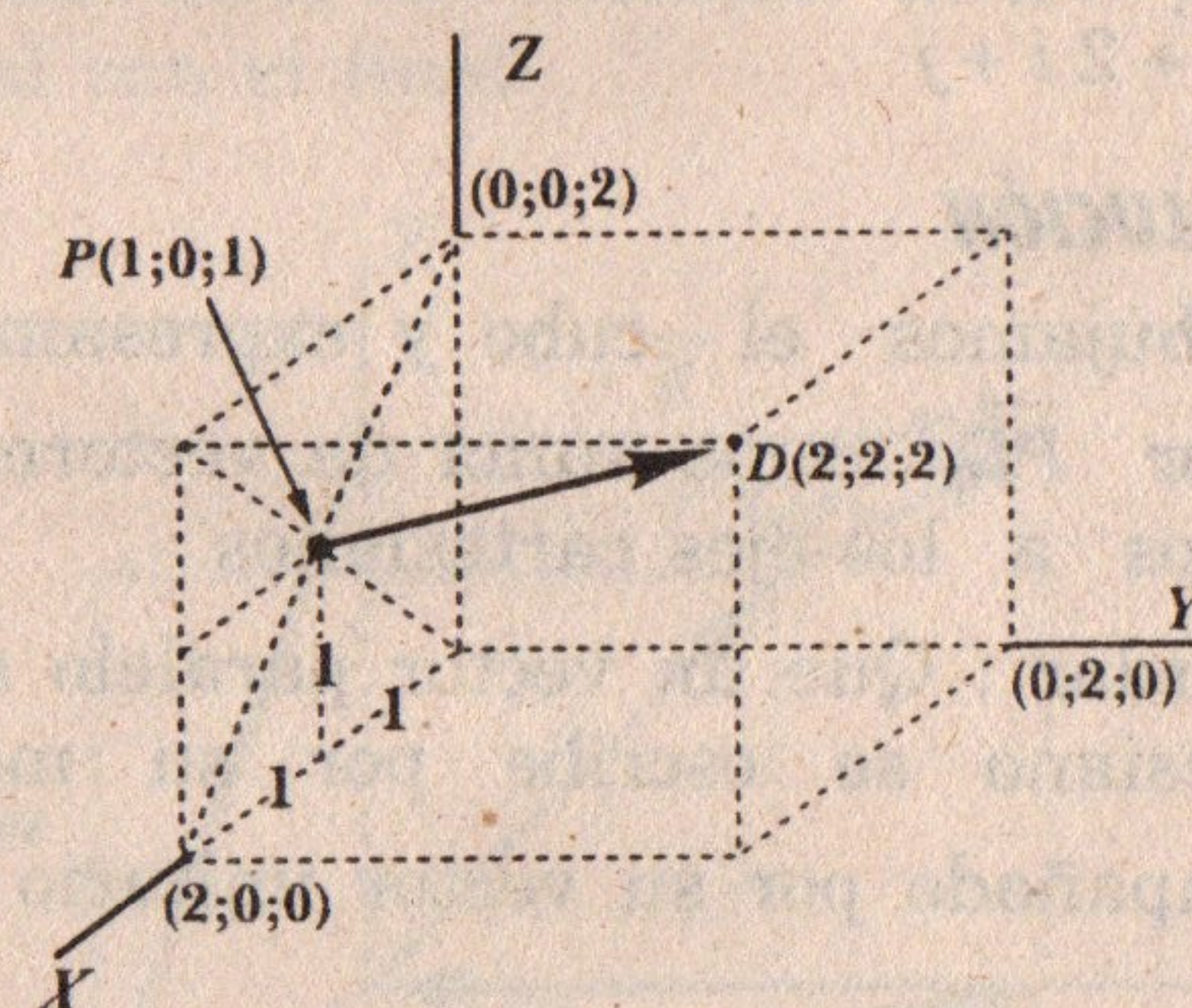
PROBLEMA 114

En la figura se muestra un cubo de arista $a = 2$, si P y Q son puntos medios de las caras, Determine el vector $\vec{PD}$ en términos de $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

A) $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ B) $2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

C) $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ D) $2\hat{j}$

E) $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

RESOLUCIÓN

Hallamos las coordenadas cartesianas de los puntos "P" y "D".

En la figura :

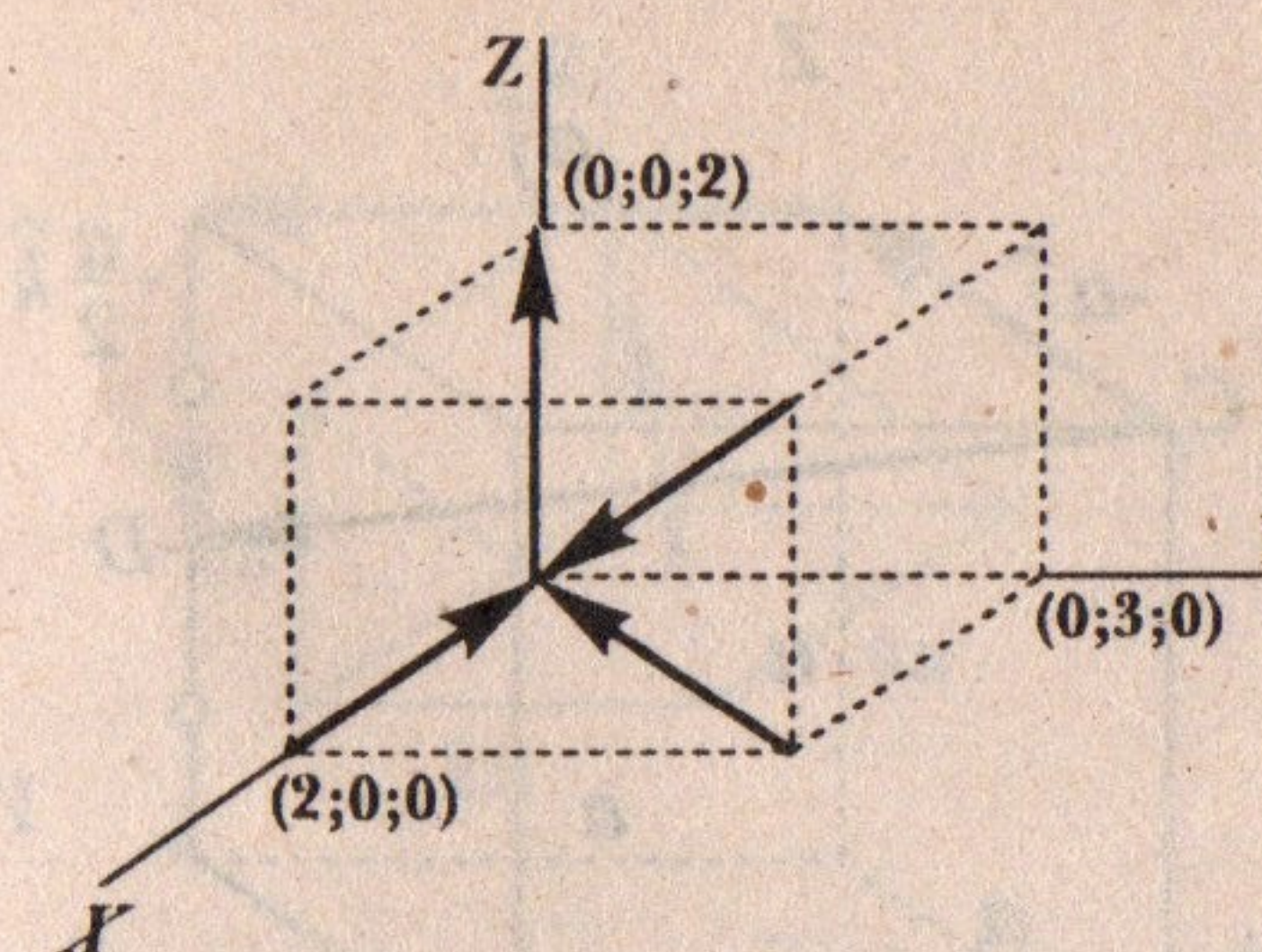
$$\vec{PD} = (2,2,2) - (1,0,1)$$

$$\vec{PD} = (1,2,1)$$

$$\therefore \boxed{\vec{PD} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}}$$

Clave: A

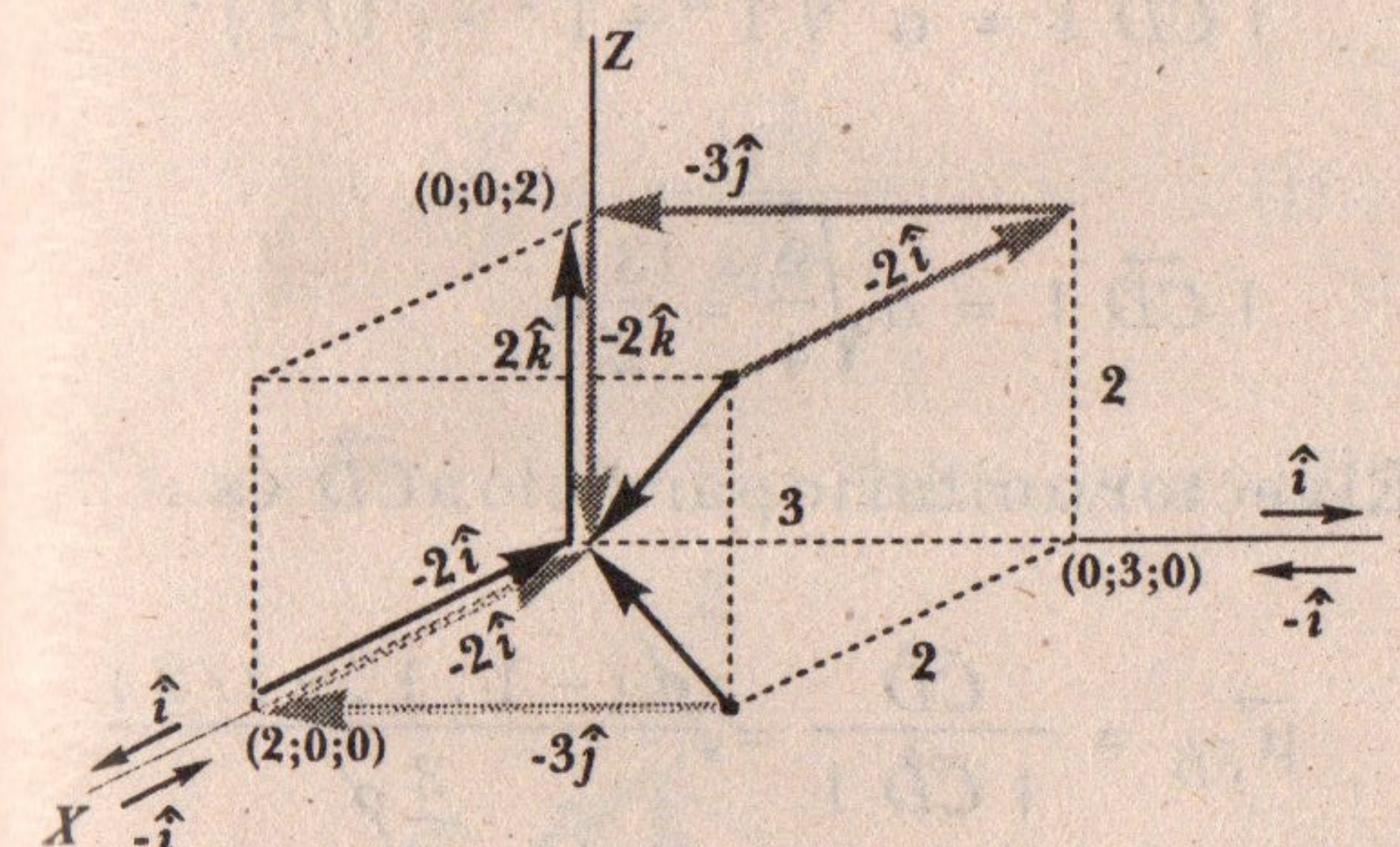
PROBLEMA 115

La figura muestra un paralelepípedo. Hállese el vector resultante.

A) $-6(\hat{i} + \hat{j})$ B) $6\hat{i} - 6\hat{j}$

C) $-6\hat{i} + 6\hat{j}$ D) $2\hat{i} - 2\hat{j}$

E) $\hat{i} - \hat{j}$

RESOLUCIÓN

Descomponemos los vectores en direcciones de los ejes cartesianos.

Observar que las aristas del paralelogramo tienen medidas 2 , 3 y 2.

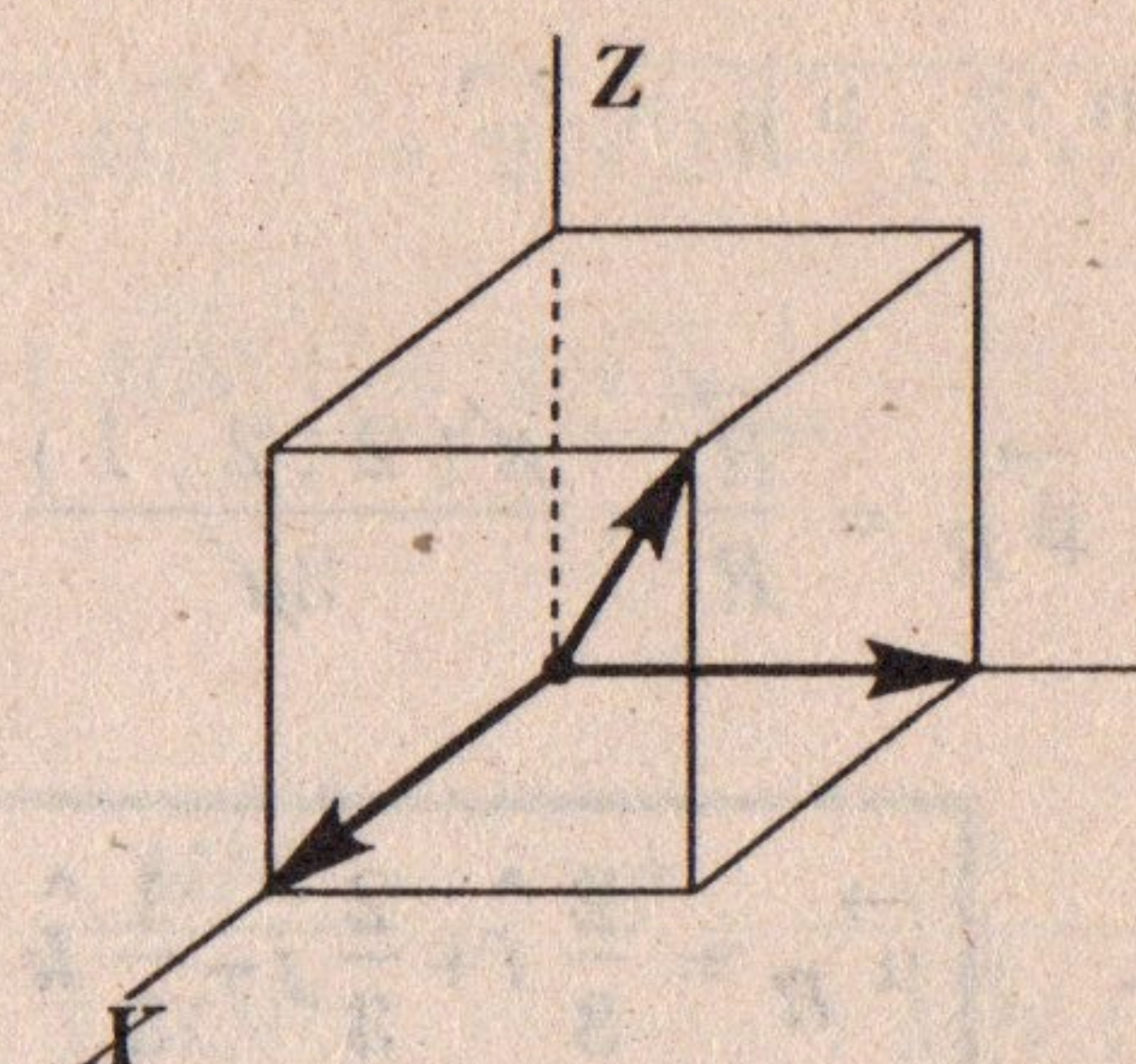
$$\vec{R} = -2\hat{i} + 2\hat{k} + (-2\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) + (-3\hat{j} - 2\hat{i})$$

$$\vec{R} = -6\hat{i} - 6\hat{j}$$

$$\therefore \boxed{\vec{R} = -6(\hat{i} + \hat{j})}$$

Clave: A

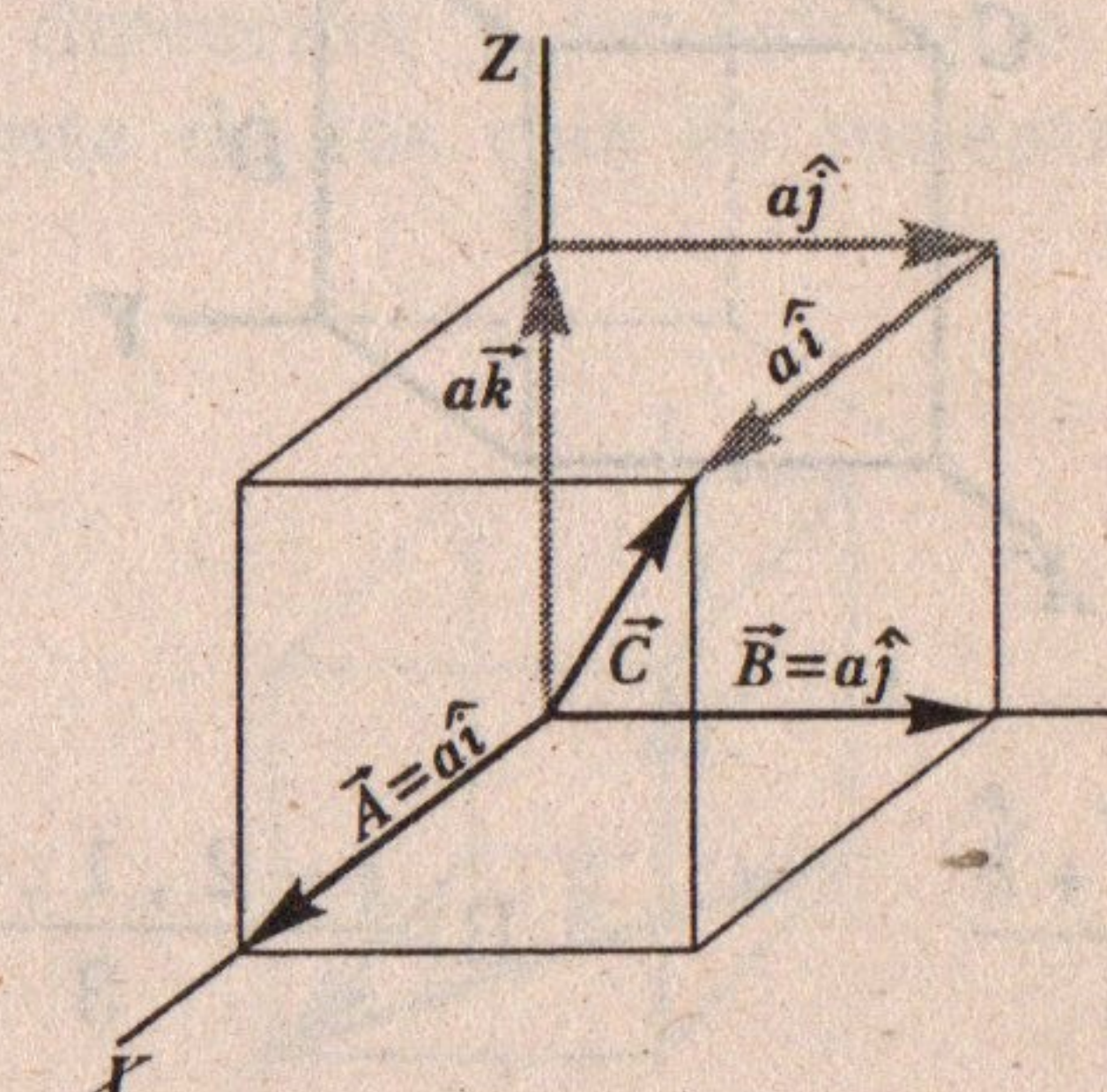
PROBLEMA 116

La figura muestra un cubo de lado a, halle el vector unitario de la suma de los vectores mostrados en la figura.

A) $\dfrac{(1,1,2)}{\sqrt{6}}$ B) $\dfrac{(2,1,2)}{3}$

C) $\dfrac{1}{3}(2,2,1)$ D) $\dfrac{(2,1,1)}{\sqrt{6}}$

E) $\dfrac{1}{3}(1,2,1)$

RESOLUCIÓN

Redibujamos y graficamos el vector de la diagonal como la suma de 3 vectores ortogonales.

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

$$\vec{R} = a\hat{i} + a\hat{j} + a\hat{k} + a\hat{j} + a\hat{i}$$

$$\vec{R} = 2a\hat{i} + 2a\hat{j} + a\hat{k}$$

$$\vec{R} = a(2,2,1)$$

$$R = a\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = a\sqrt{9}$$

$$R = 3a$$

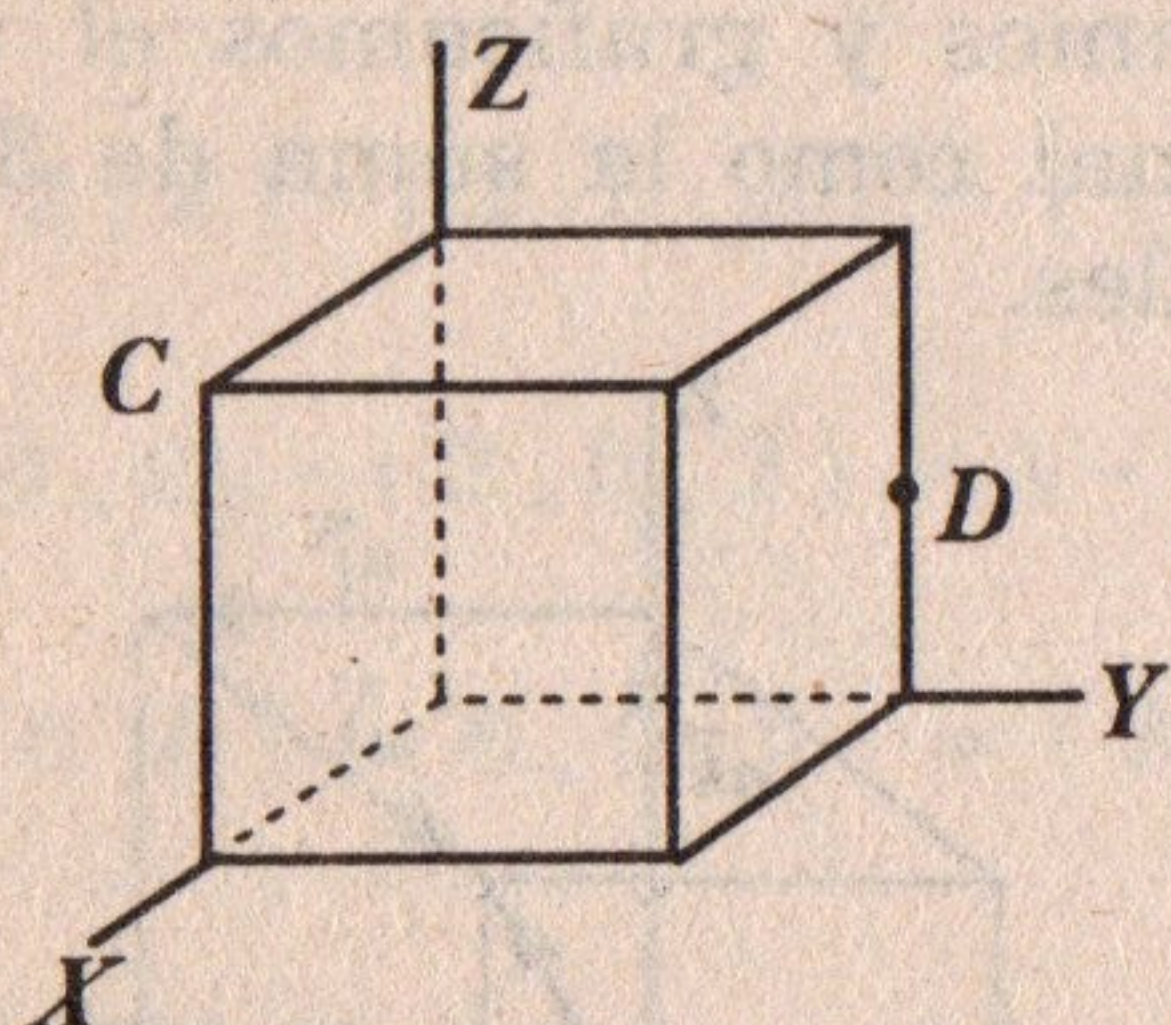
Nos piden : $\mu_R = ??$

$$\vec{\mu}_R = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{\not{a}(2,2,1)}{3\not{a}}$$

$$\therefore \boxed{\vec{\mu}_R = \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{1}{3}\hat{k}}$$

Clave: C

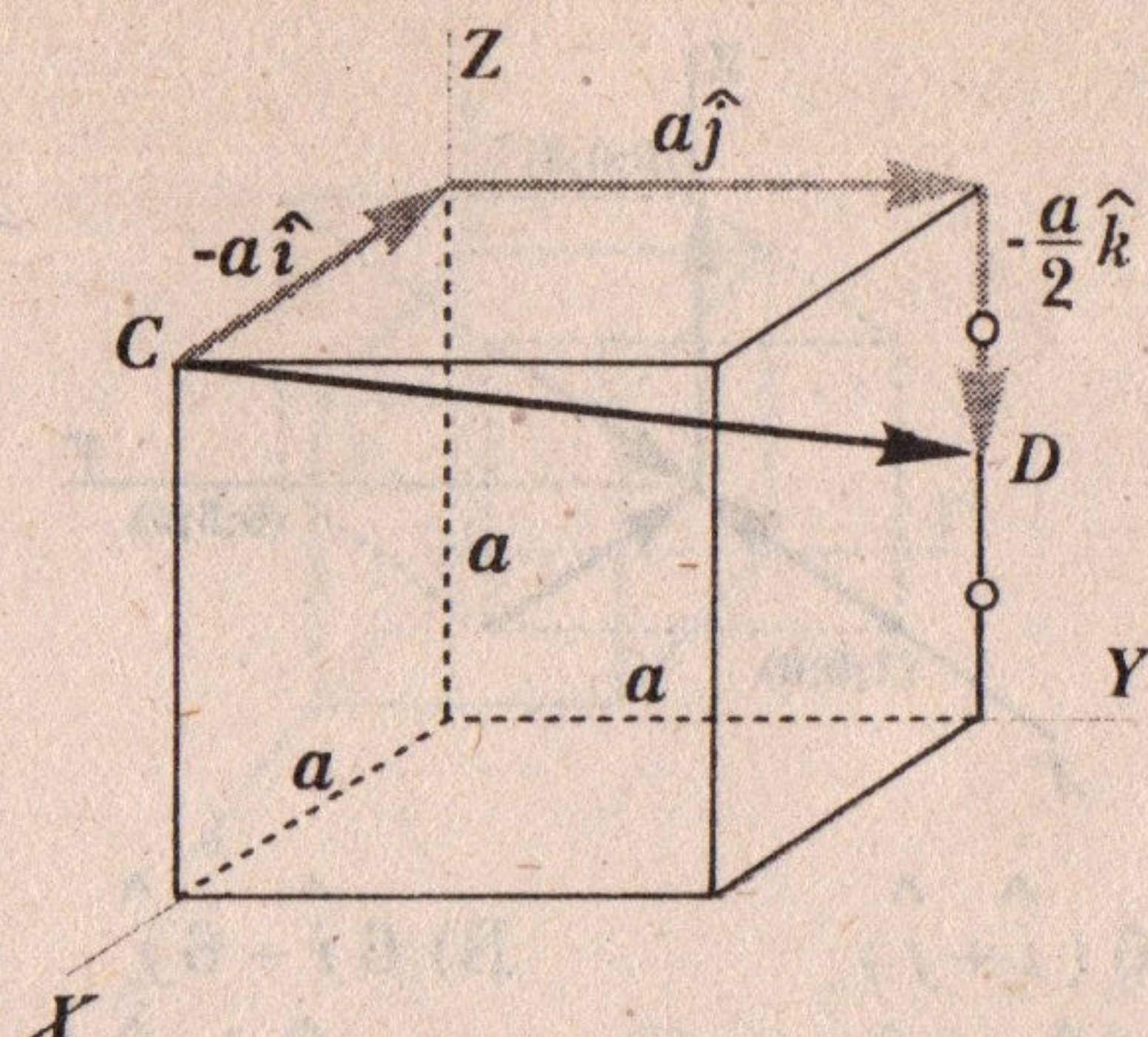
PROBLEMA 117

En la figura determine un vector unitario paralelo a la línea CD en el cubo de arista "a" y donde "D" es punto medio de la arista.

A) $\dfrac{-\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{3}}$ B) $\dfrac{(-2,1,-2)}{3}$

C) $-\dfrac{2}{3}\hat{i}+\dfrac{2}{3}\hat{j}+\dfrac{1}{3}\hat{k}$ D) $-\dfrac{2}{3}\hat{i}+\dfrac{2}{3}\hat{j}-\dfrac{\hat{k}}{3}$

E) $\dfrac{\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{6}}$

RESOLUCIÓN

Graficamos el cubo del problema y en reemplazo de $\vec{CD}$ lo escribimos como una suma de vectores paralelos a los ejes cartesianos (ortogonales).

Luego :

$$\vec{CD} = -a\hat{i} + a\hat{j} - \frac{a}{2}\hat{k}$$

$$\vec{CD} = a(-1, 1, -1/2)$$

$$|\vec{CD}| = a\sqrt{1^2+1^2+(1/2)^2}$$

$$|\vec{CD}| = a\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}a$$

El vector unitario paralelo a $\vec{CD}$ es :

$$\vec{\mu}_{\vec{CD}} = \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|} = \frac{\not{a}(-1, 1, -1/2)}{\frac{3}{2}\not{a}}$$

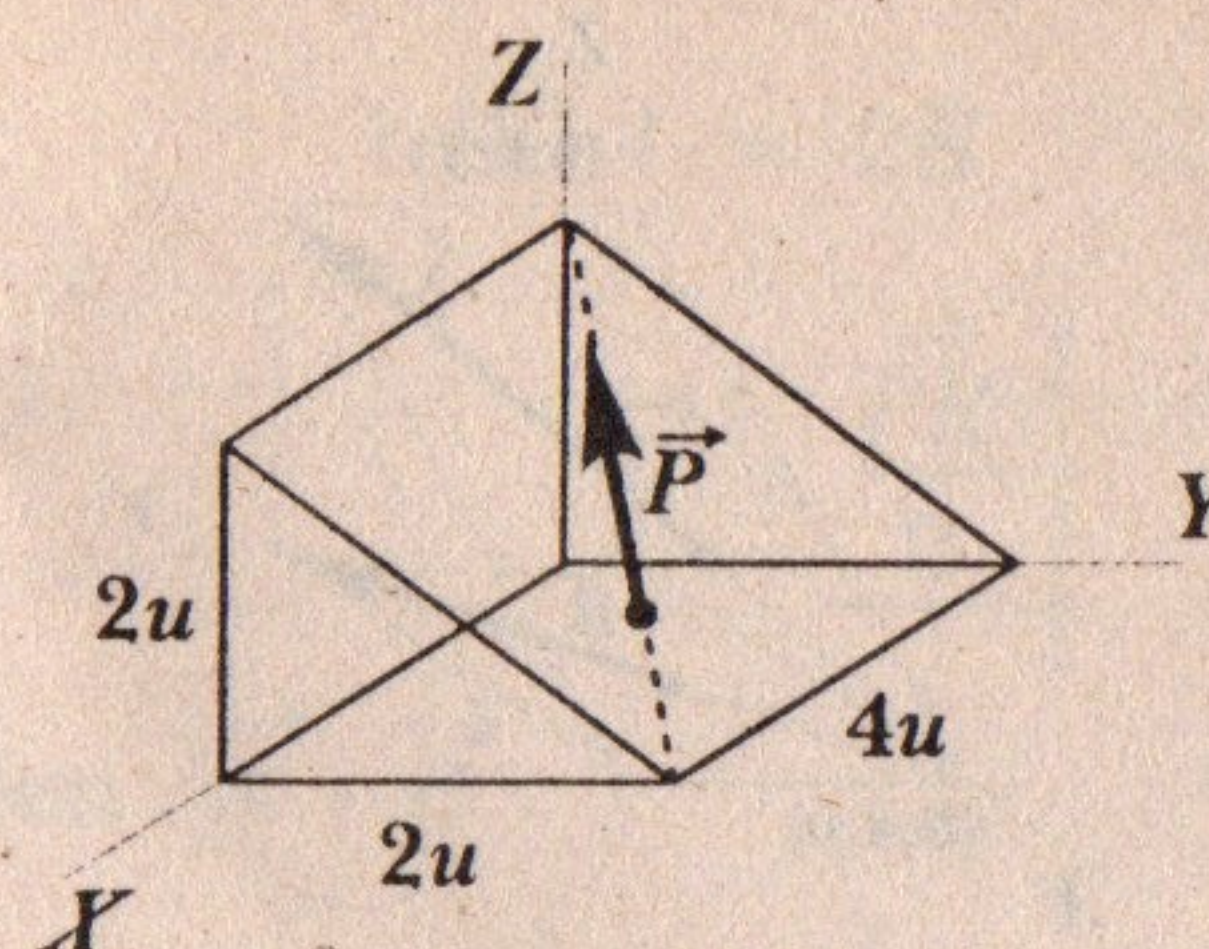
$$\vec{\mu}_{CD} = \frac{2}{3}\left(-1, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{\mu}_{\vec{CD}} = \frac{1}{3}(-2, 2, -1)$$

$$\therefore \boxed{\vec{\mu}_{\vec{CD}} = -\frac{2}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{k}}$$

Clave: D

PROBLEMA 118

Halle el vector $\vec{P}$, si su módulo es $\sqrt{6}\,u$.

A) (1 , 2 , – 2) B) (– 2 , – 1 , 1)

C) (2 , – 1 , 1) D) (2 , – 1 , 3)

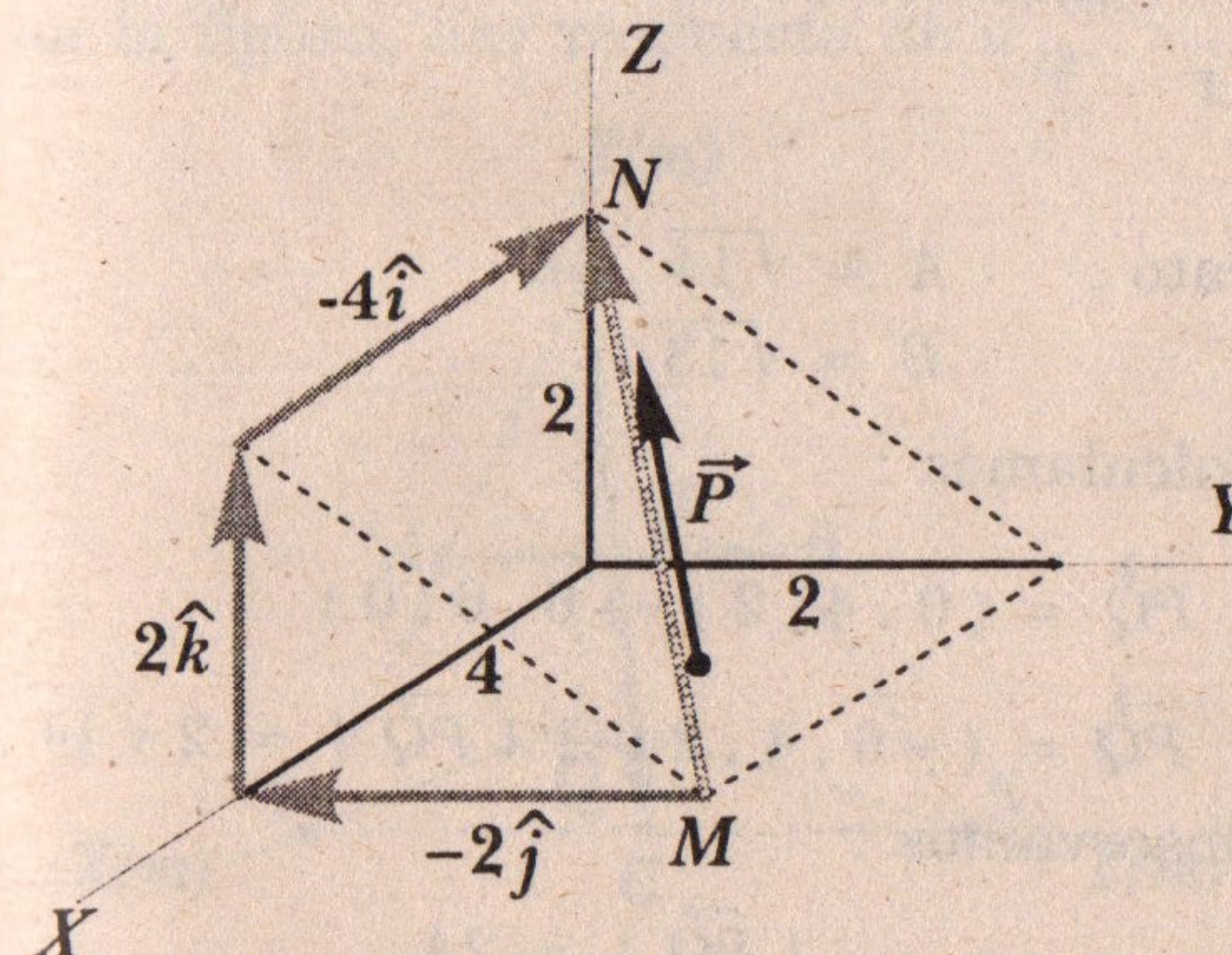
E) (– 4 , – 2 , 2)

RESOLUCIÓN

Graficamos la cuña y aplicando la teoría usada en anteriores problemas.

Si: $\vec{P} // \vec{MN}$

$$\frac{\vec{P}}{P} = \frac{\vec{MN}}{|\vec{MN}|} \quad \ldots (I)$$

Dato : $P = \sqrt{6}$

$$\vec{MN} = -2\hat{j} + 2\hat{k} - 4\hat{i}$$

$$\vec{MN} = -4\hat{i} - 2\hat{j} + 2k$$

$$\vec{MN} = 2(-2, -1, 1)$$

$$|\vec{MN}| = 2\sqrt{2^2+1^2+1^2}$$

$$|\vec{MN}| = 2\sqrt{6}$$

De (I) :

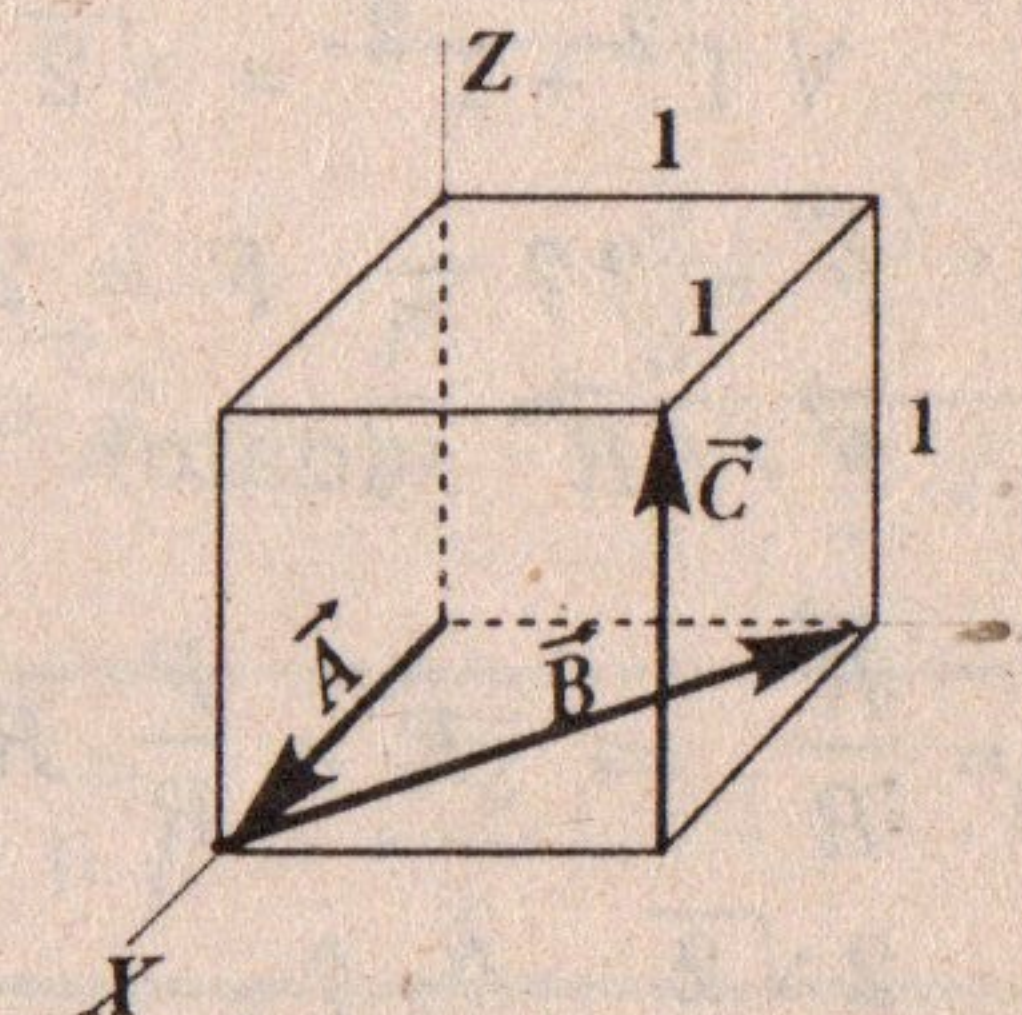
$$\frac{\vec{P}}{P} = \frac{\vec{MN}}{|\vec{MN}|} \Rightarrow \vec{P} = \frac{P}{|\vec{MN}|}\cdot\vec{MN}$$

$$\vec{P} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}\cdot 2(-2, -1, 1)$$

$$\therefore \boxed{\vec{P} = (-2, -1, 1)}$$

Clave: B

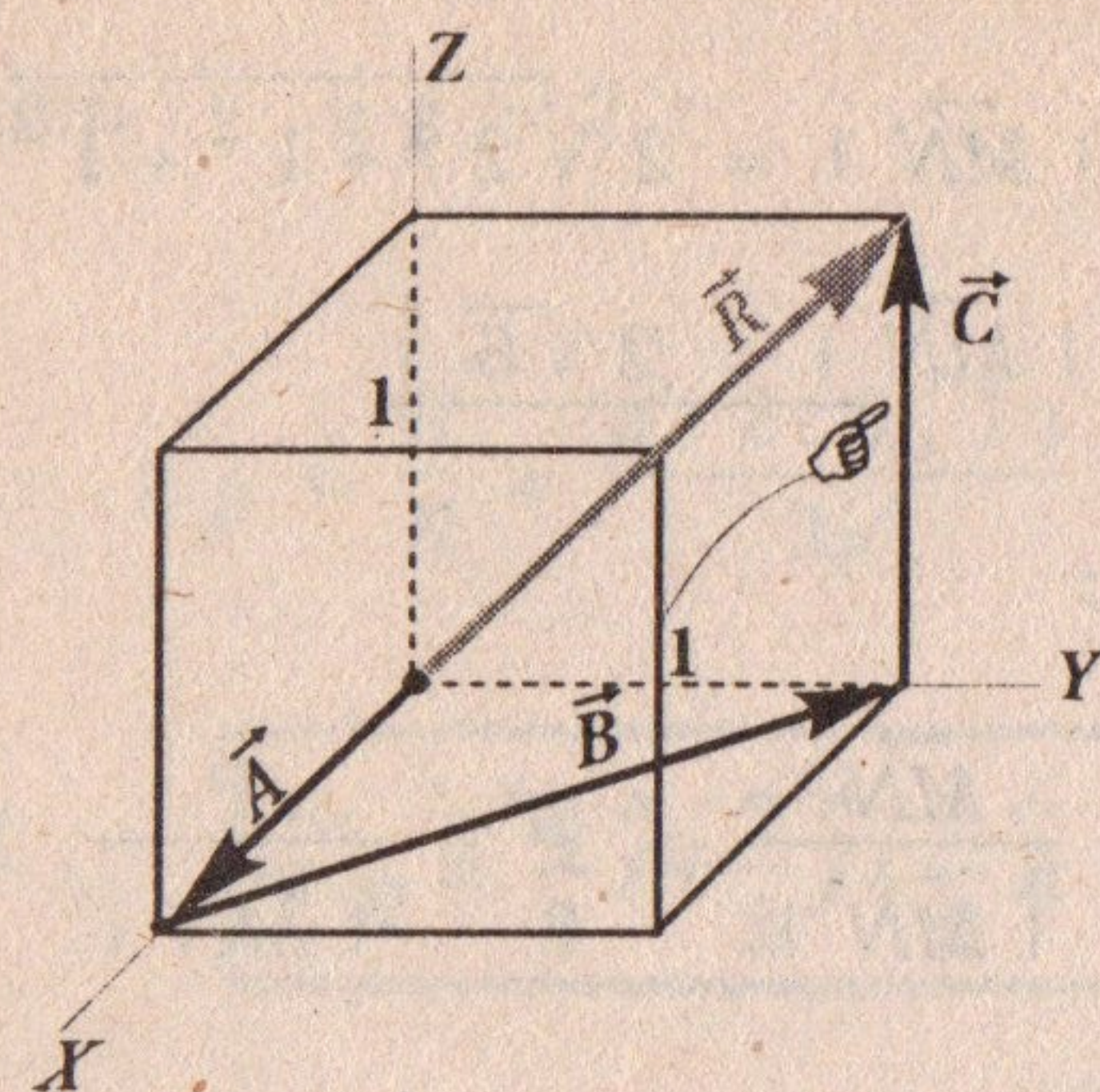
PROBLEMA 119

Determinar la expresión vectorial de $\vec{F}$, cuyo módulo es $2\sqrt{2}$ y que tiene la misma dirección y sentido que el vector resultante de los que se muestran en la figura.

A) $2(\hat{i}+\hat{j})$ B) $2(\hat{i}+\hat{k})$

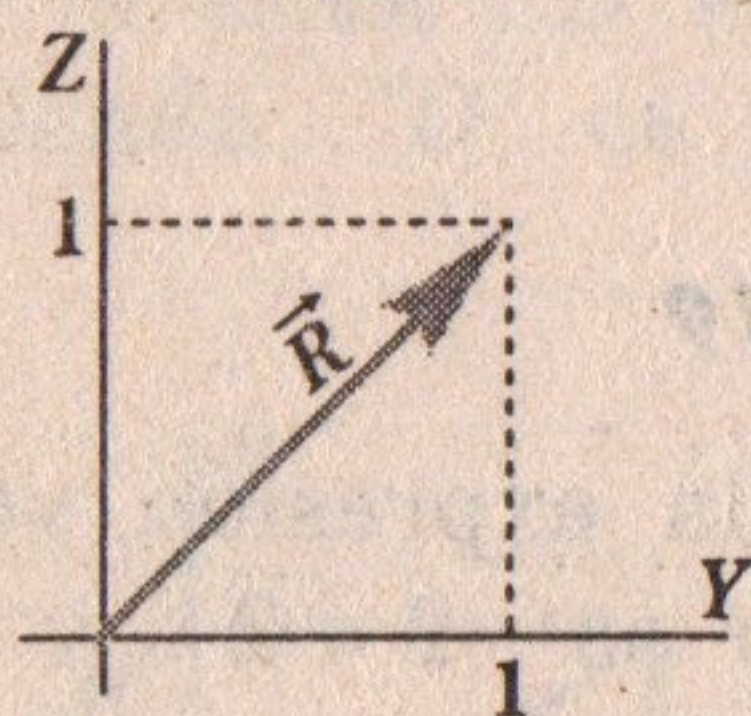
C) $2(\hat{i}+\hat{k}+\hat{j})$ D) $2(\hat{j}+\hat{k})$

E) $2\hat{j}+\hat{k}$

RESOLUCIÓN

Ubicando los vectores uno a continuación del otro, calculamos la resultante : $\vec{R}$.

* En la figura

- $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$
- $\vec{R}$: se encuentra en los ejes YZ

Grafiquemos a $\vec{R}$.

$$\vec{R} = \hat{j} + \hat{k}$$

$$R = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Nos piden : $\vec{F} = ??$; $F = 2\sqrt{2}$

$\vec{F} // \vec{R}$ (dato)

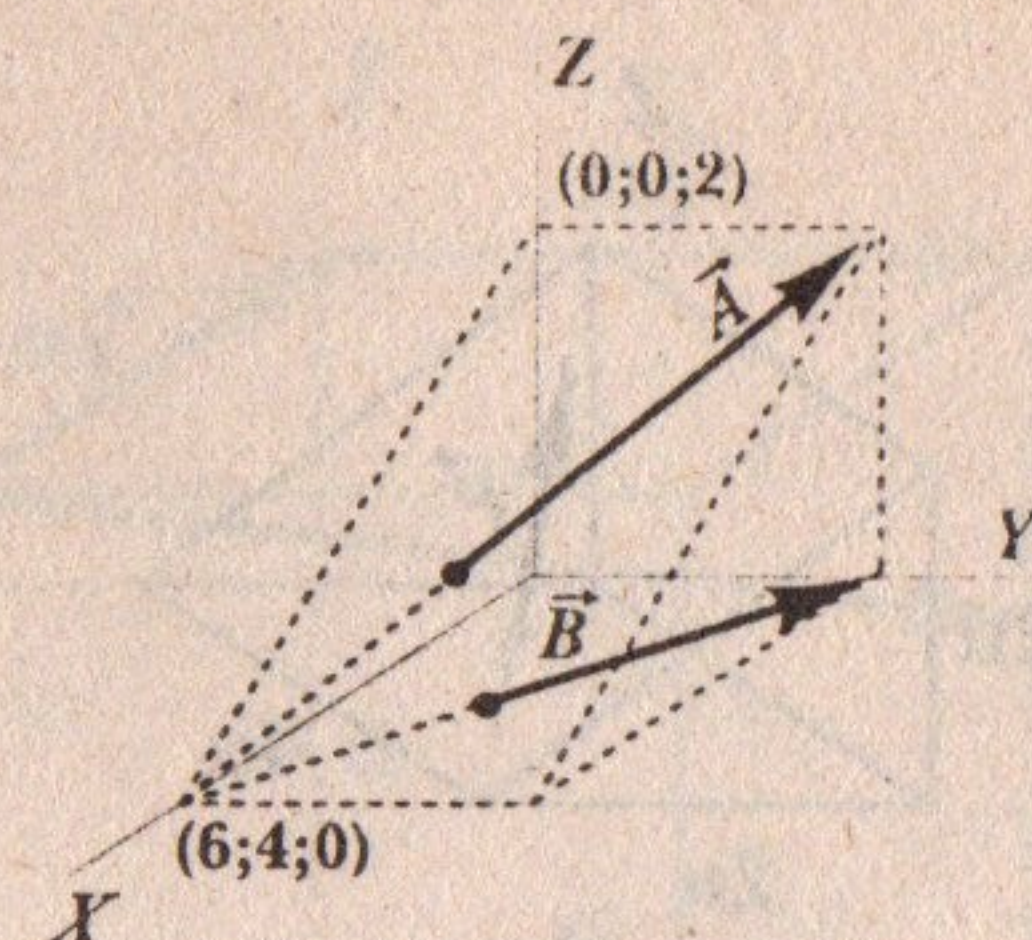
$$\frac{\vec{F}}{F} = \frac{\vec{R}}{R} \Rightarrow \vec{F} = \frac{F}{R} \cdot \vec{R}$$

$$\vec{F} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot (\hat{j} + \hat{k})$$

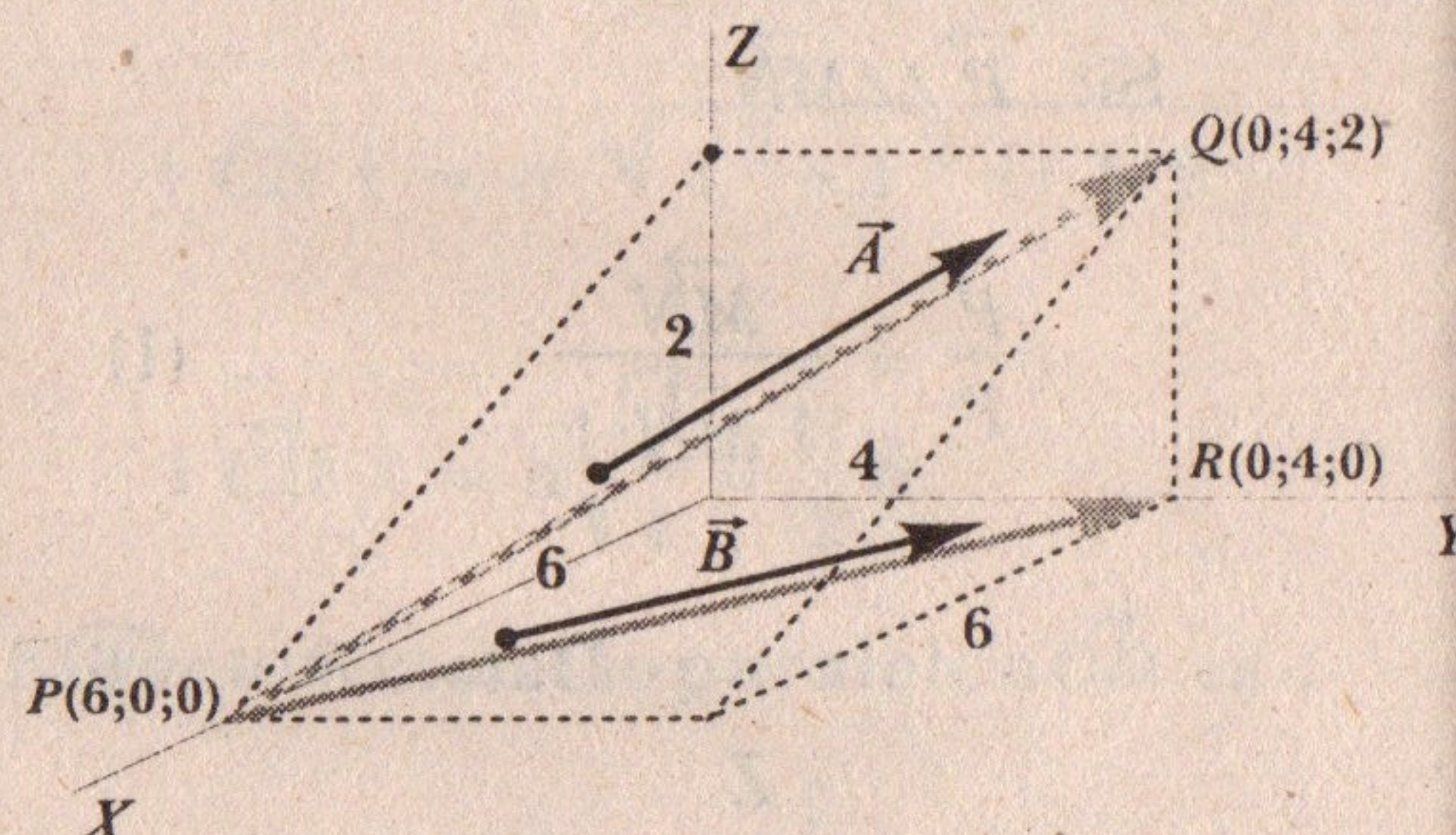
$$\therefore \boxed{\vec{F} = 2(\hat{j} + \hat{k})}$$

Clave: D

PROBLEMA 120 (Sem. CEPRE-UNI 97-II)

Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cuyos módulos son $A = \sqrt{14}$ y $B = \sqrt{13}$, determinar las componentes rectangulares del vector $\vec{A} - \vec{B}$.

A) (1 , 0 , 0) B) (2 , 0 , 0)
C) (0 , 0 , 2) D) (0 , 0 , 1)
E) (1 , 0 , 1)

RESOLUCIÓN

Graficamos la cuña, para determinar los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Dato : $A = \sqrt{14}$
$B = \sqrt{13}$

Calculamos :

$$\vec{PQ} = (0,4,2) - (6,0,0)$$

$$\vec{PQ} = (-6,4,2) \; ; \; |\vec{PQ}| = 2\sqrt{14}$$

Observamos :

$$|\vec{PQ}| = 2A$$

$$\therefore \vec{A} = \frac{\vec{PQ}}{2}$$

$$\vec{PR} = (0,4,0) - (6,0,0)$$

$$\vec{PR} = (-6,4,0) \; ; \; |\vec{PR}| = 2\sqrt{13}$$

Luego : $|\vec{PR}| = 2B$

$$\therefore \vec{B} = \frac{\vec{PR}}{2}$$

Nos piden $\vec{A} - \vec{B}$.

$$\vec{A} - \vec{B} = \frac{\vec{PQ}}{2} - \frac{\vec{PR}}{2} = \frac{\vec{PQ} - \vec{PR}}{2}$$

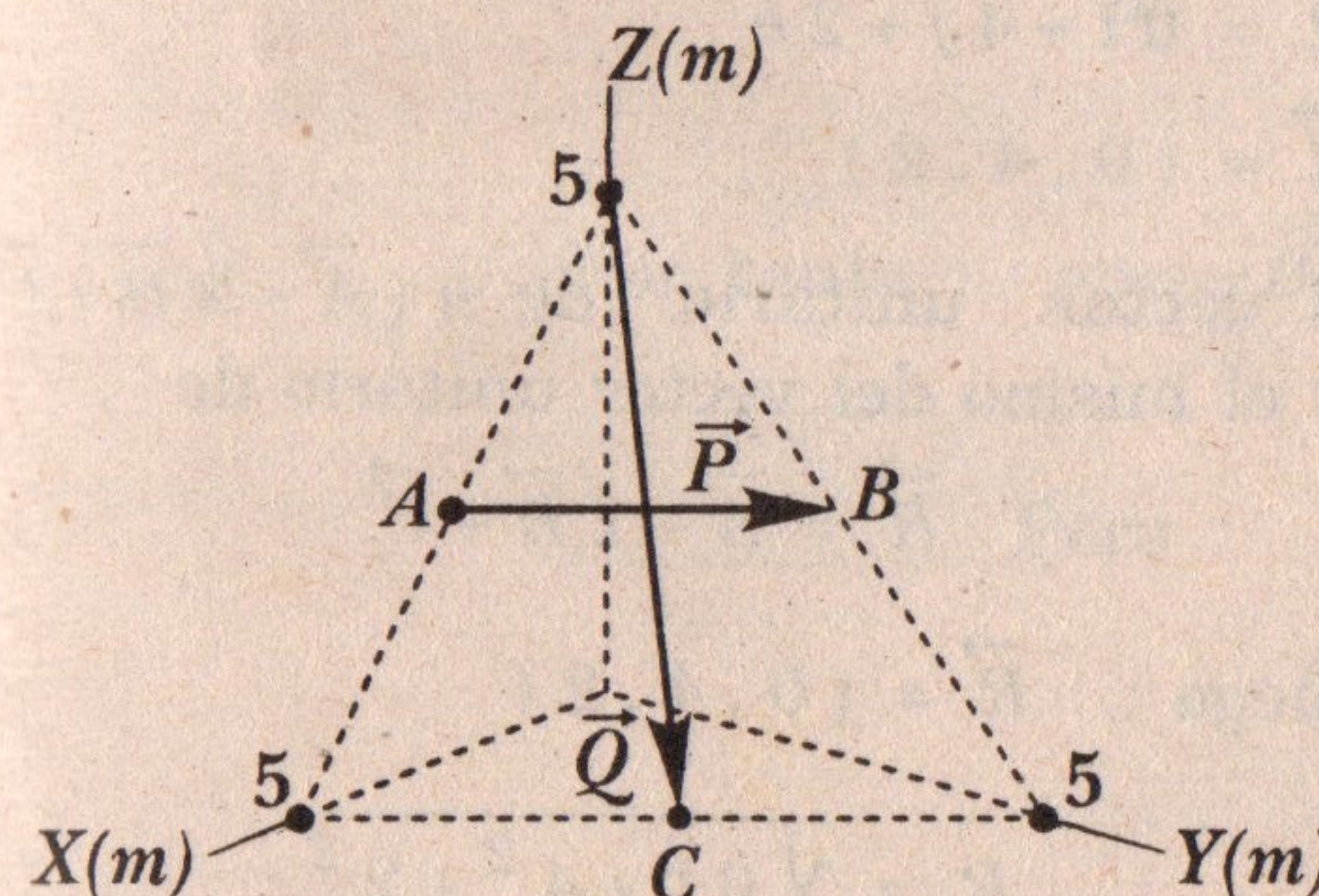
$$\vec{A} - \vec{B} = \frac{1}{2}[(-6,4,2) - (-6,4,0)]$$

$$\vec{A} - \vec{B} = \frac{1}{2}(0,0,2)$$

$$\therefore \boxed{\vec{A} - \vec{B} = (0,0,1)}$$

Clave.: D

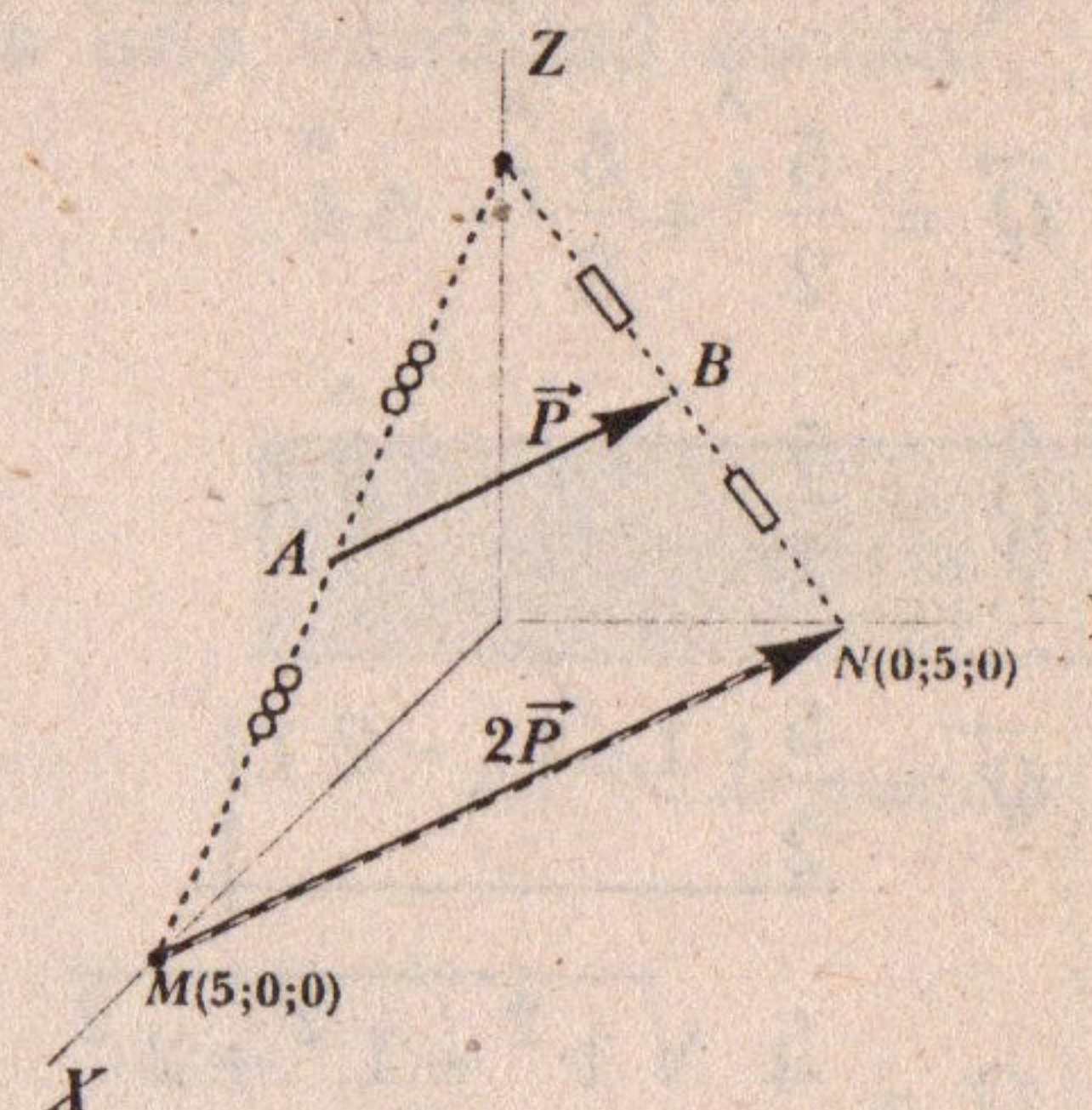
PROBLEMA 121 (Sem. CEPRE-UNI 2001-II)

Hallar los vectores unitarios de los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$. Si A, B y C son puntos medios de los lados del triángulo mostrado en la figura; dar respuesta de $\vec{\mu}_Q$.

A) $\frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}}$ B) $\frac{(1,1,2)}{\sqrt{6}}$

C) $\frac{\sqrt{6}}{6}(1,1,-2)$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,-1)$

E) $\frac{\sqrt{6}}{6}(1,-2,1)$

RESOLUCIÓN

a) Cálculo del vector unitario de $\vec{P}$:

Observamos : $\vec{MN} = 2\vec{AB}$

Luego : $2\vec{P} = (0,5,0) - (5,0,0)$

$$2\vec{P} = (-5,5,0)$$

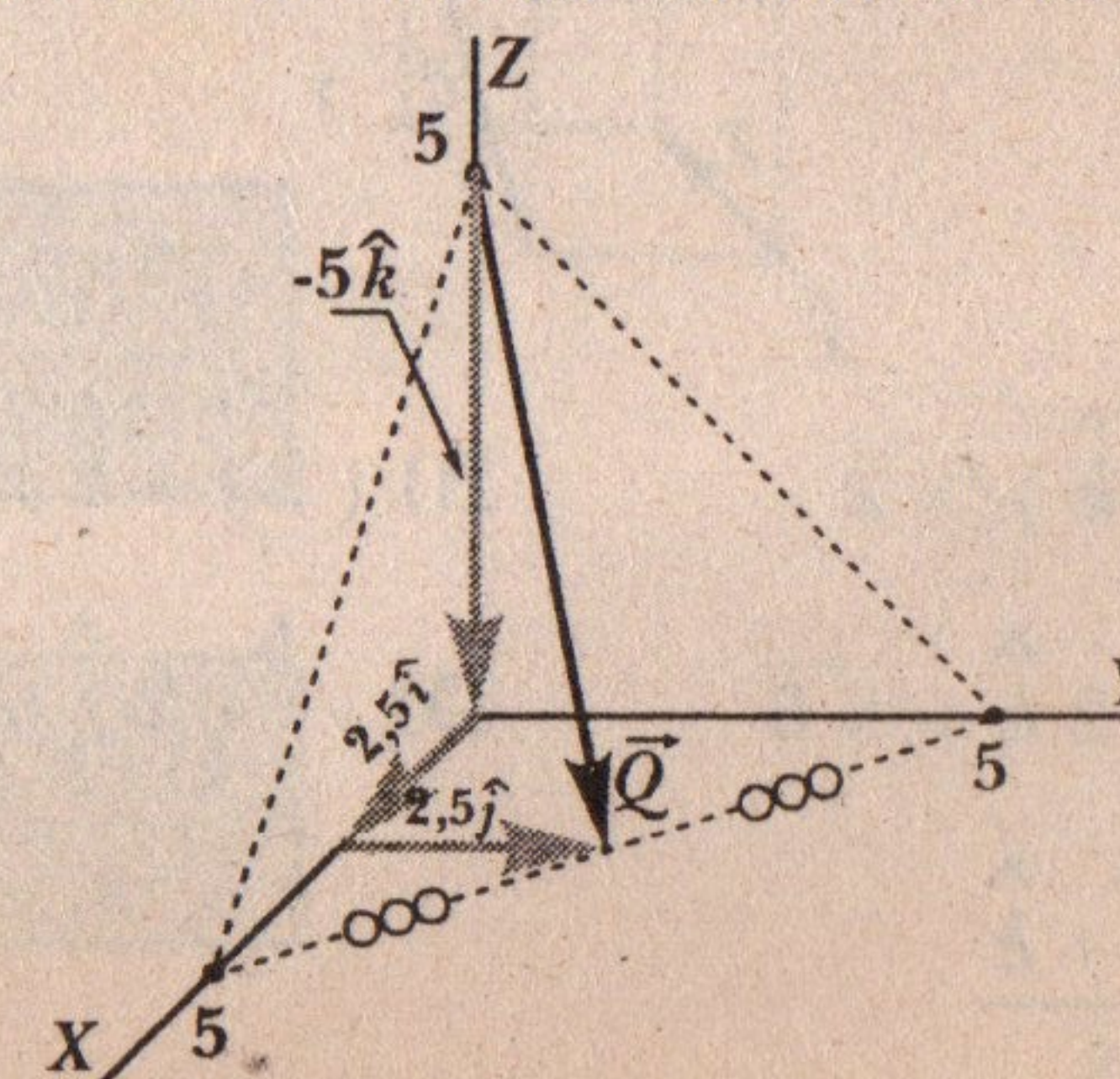
$$\therefore \vec{P} = \frac{5}{2}(-1,1,0)$$

$$P = \frac{5}{2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}$$

$$P = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{\mu}_P = \frac{\vec{P}}{P} = \frac{\frac{5}{2}(-1,1,0)}{\frac{5\sqrt{2}}{2}}$$

$$\boxed{\vec{\mu}_P = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1,0)}$$

b) Cálculo de vector unitario de $\vec{Q}$:

* En la figura :

$$\vec{Q} = -5\hat{k} + 2{,}5\,\hat{i} + 2{,}5\,\hat{j}$$

$$\vec{Q} = \frac{5}{2}\hat{i} + \frac{5}{2}\hat{j} - 5\hat{k}$$

$$\hat{Q} = \frac{5}{2}(\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$$

$$\therefore \quad \vec{Q} = \frac{5}{2}(1, 1, -2)$$

$$Q = \frac{5}{2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}$$

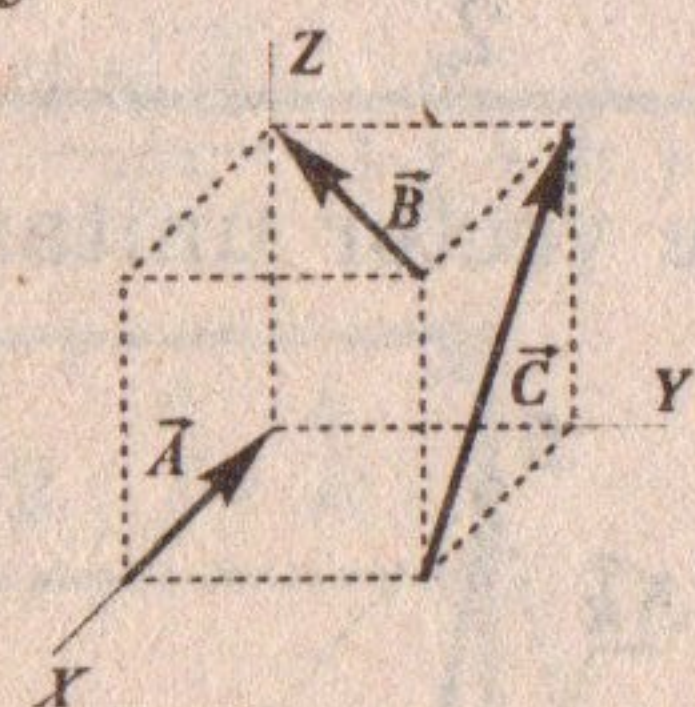
$$Q = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

$$\vec{\mu}_Q = \frac{\vec{Q}}{Q} = \frac{\frac{5}{2}(1, 1, -2)}{\frac{5}{2}\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{\mu}_Q = \frac{\sqrt{6}}{6}(1, 1, -2)}$$

Clave: C

PROBLEMA 122

En el cubo de la figura de $2m$ de arista, se ubican los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, y $\vec{C}$. Determine el vector unitario paralelo a $n(\vec{A} - 2\vec{B} + \vec{C})$, donde n es un número entero y arbitrario.

A) $(\hat{j} + \hat{k})/\sqrt{2}$

B) $(2\hat{j} + \hat{k})/\sqrt{5}$

C) $(\hat{j} + 2\hat{k})/\sqrt{5}$

D) $(\hat{i} + 2\hat{j})/\sqrt{5}$

E) $\frac{\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{3}}$

RESOLUCIÓN

Hallemos las componentes cartesianas de cada vector.

$$\vec{A} = -2\hat{i}$$

$$\vec{B} = -2\hat{j} - 2\hat{i}$$

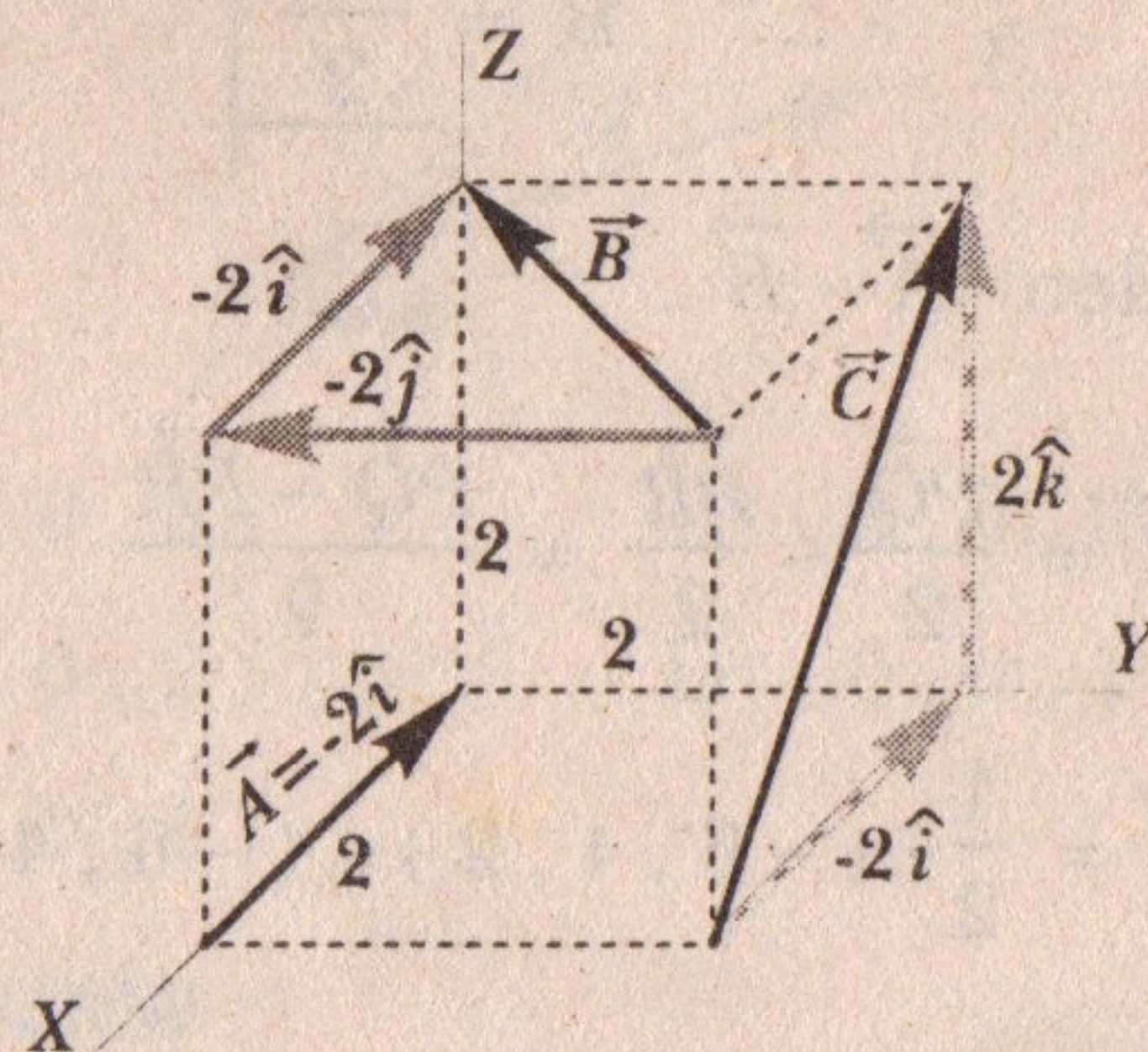
$$\vec{B} = -2\hat{i} - 2\hat{j}$$

$$\vec{C} = -2\hat{i} + 2\hat{k}$$

Luego :

$$\vec{R} = \vec{A} - 2\vec{B} + \vec{C}$$

$$\vec{R} = -2\hat{i} - 2(-2\hat{i} - 2\hat{j}) + (-2\hat{i} + 2\hat{k})$$

$$\vec{R} = 0\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{R} = (0, 4, 2)$$

El vector unitario de $n(\vec{A} - 2\vec{B} + \vec{C})$ es el mismo del vector unitario de :

$$\vec{R} = \vec{A} - 2\vec{B} + \vec{C}$$

Luego : $\vec{R} = (0, 4, 2)$

$$R = \sqrt{0^2 + 4^2 + 2^2}$$

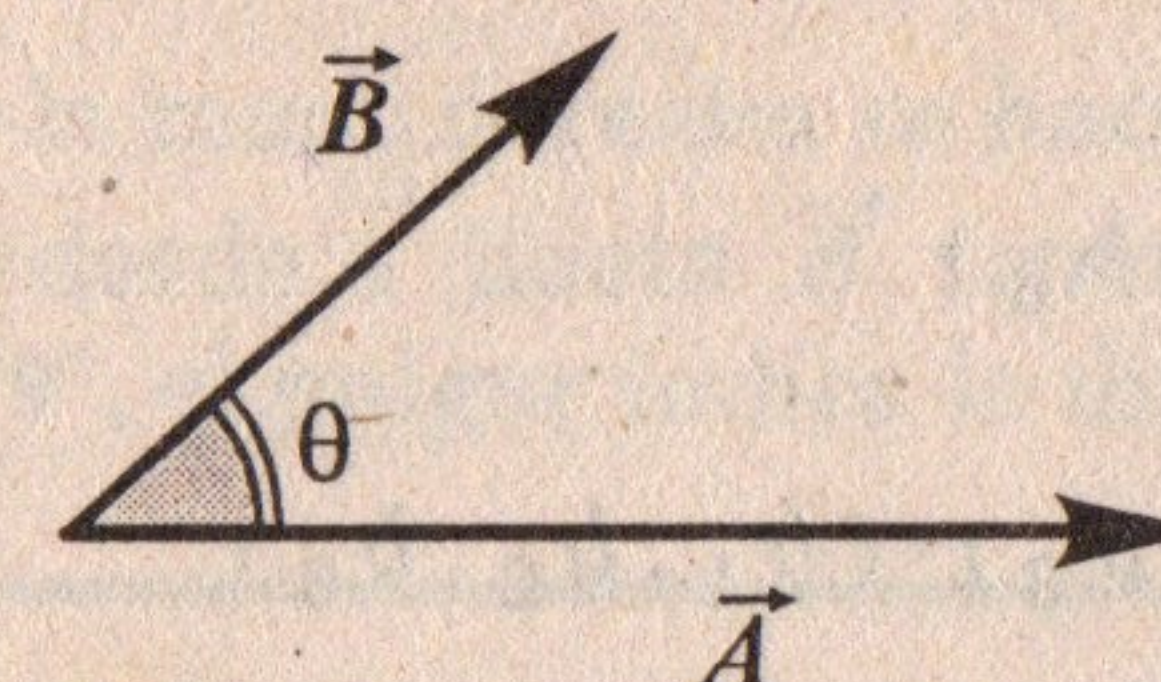
$$R = 2\sqrt{5}$$

$$\vec{\mu}_R = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{(0, 4, 2)}{2\sqrt{5}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{\mu}_{\vec{R}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\hat{j} + \hat{k})}$$

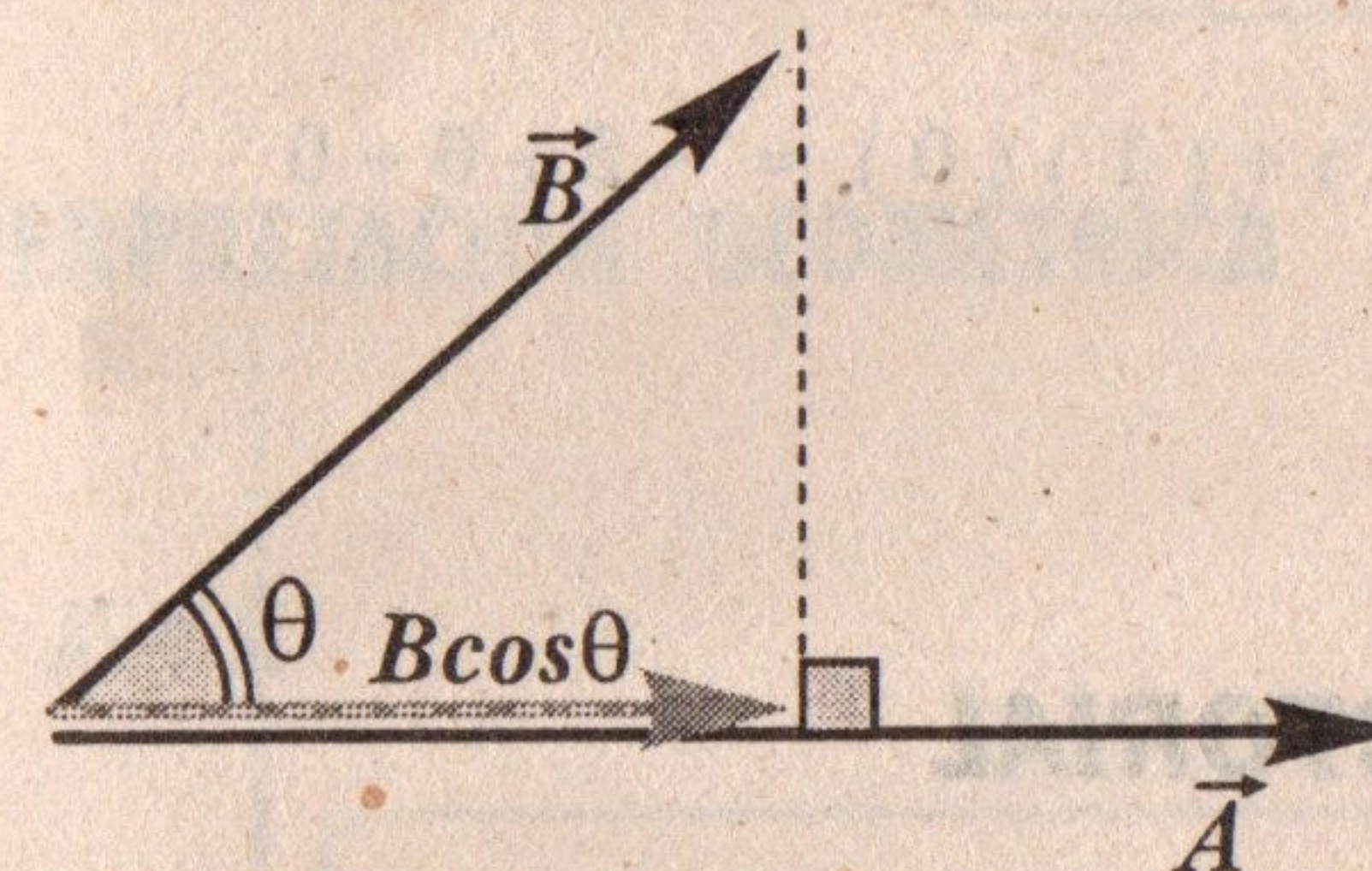
Clave: B

PRODUCTO ESCALAR

Llamado también producto punto; el resultado es una cantidad escalar. Se define como :

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta}$$

punto

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Sean los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

* $B\cos\theta$, es la proyección del vector $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$.

Luego :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A\,\underbrace{B\cos\theta}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot proy_{\vec{A}}\vec{B}$$

Por tanto : $proy_{\vec{A}}\vec{B} = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A}$

Pero : $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

$$AB\cos\theta = BA\cos\theta$$

Luego :

$$\boxed{proy_{\vec{A}}\vec{B} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{A}}$$

$$\boxed{proy_{\vec{A}}\vec{B} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{B}}$$

Observación

Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están expresados en forma cartesiana.

$$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3)$$

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

❑ **Ejemplo :**

Si $\vec{A} = (2, 3, 1)$

$\vec{B} = (-1, 2, 0)$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2)(-1) + (3)(2) + (1)(0) = -2 + 6 + 0$

$\therefore \boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = 4}$ *Rpta.*

PRODUCTO VECTORIAL

También llamado producto aspa, el resultado es otro vector perpendicular a los vectores multiplicados. La dirección se determina por la regla de la mano derecha.

Se define como :

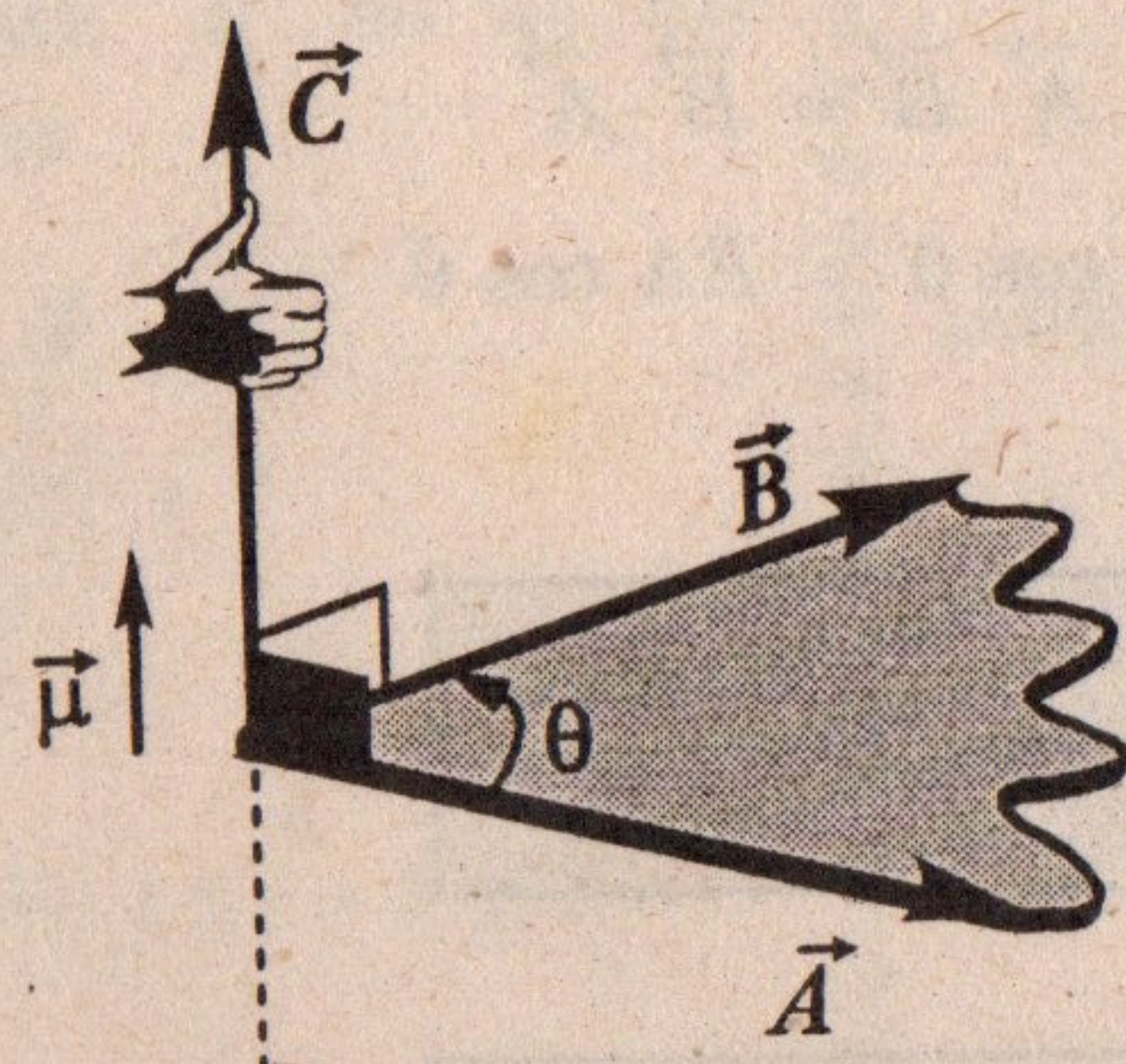
$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}}$$

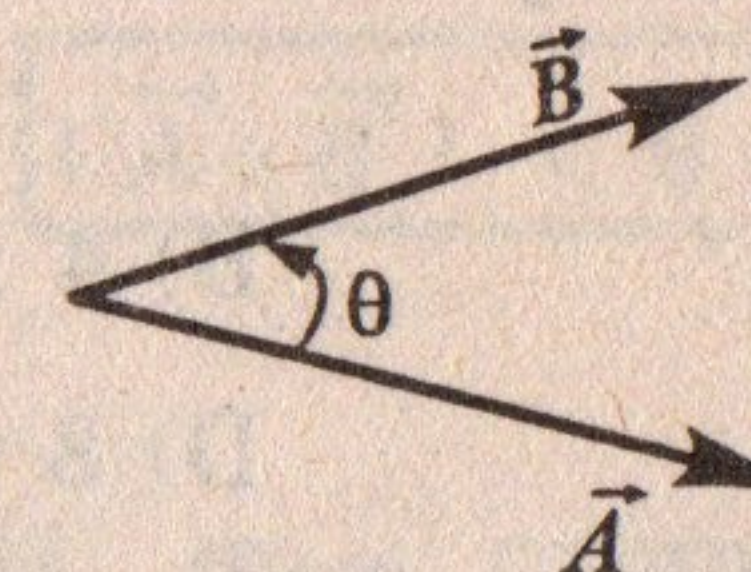
(aspa)

Donde :

$C = AB \operatorname{sen} \theta$

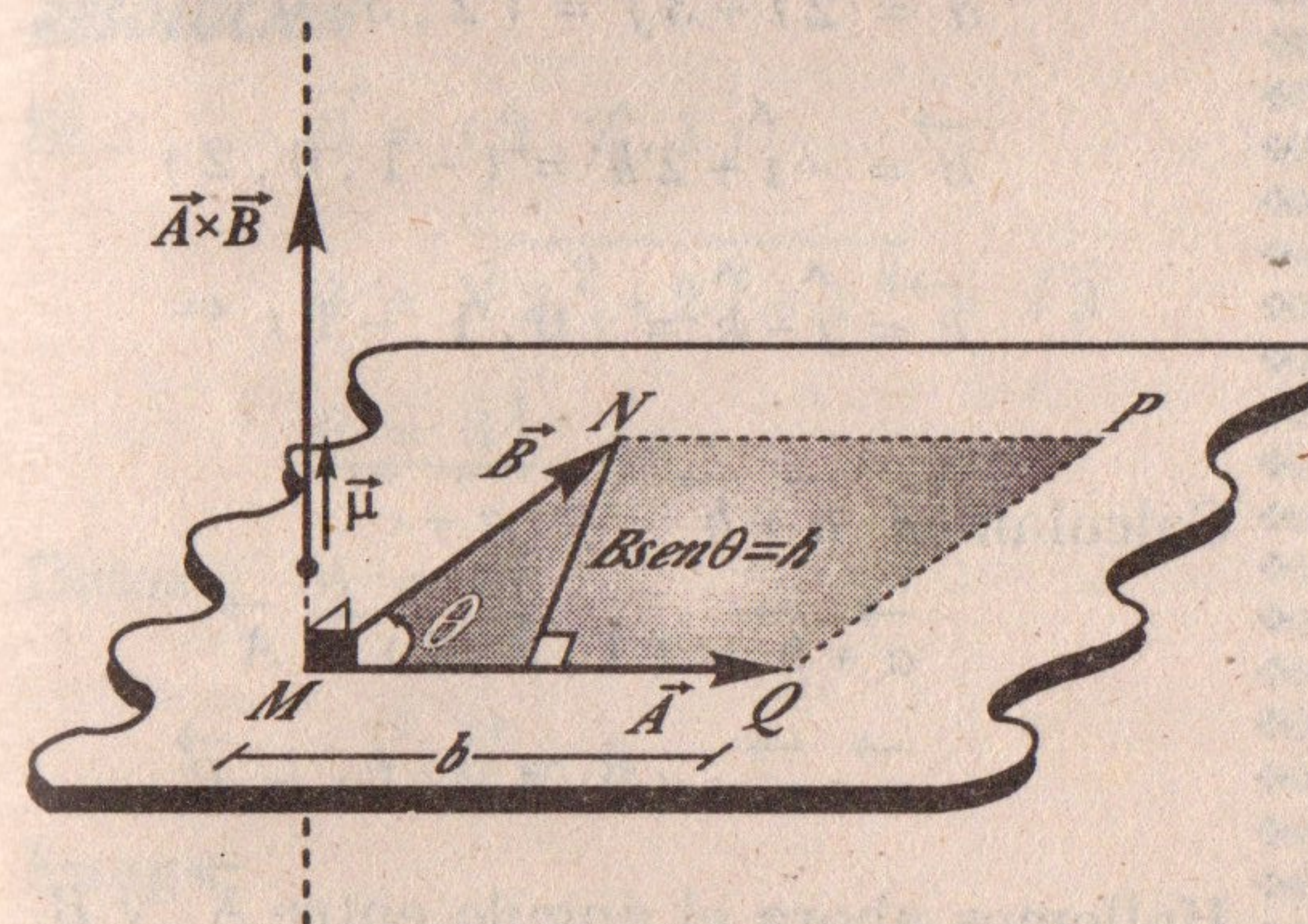
$\vec{C} = AB \operatorname{sen} \theta \, \vec{\mu}$

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = (AB \operatorname{sen} \theta)\, \vec{\mu}}$$

Observación 1)

* $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están en un mismo plano.
* $\vec{C}$ es perpendicular al plano.
* La regla de la mano derecha se hace doblando los 4 dedos desde $\vec{A}$ hasta $\vec{B}$; como si rotara un ángulo "θ"; el pulgar indica la dirección

Importante

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}} \qquad \boxed{|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{B} \times \vec{A}|}$$

$$\boxed{\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \ ; \ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \ ; \ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \operatorname{sen} \theta = A \cdot h = \underbrace{b \cdot h}_{\text{área}}$

Luego :

$$\boxed{|\vec{A} \times \vec{B}| = \text{Área paralelogramo } MNPQ}$$

* *Los lados del paralelogramo son A y B.*

Observación 2)

Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ estan expresados en forma cartesiana: $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - b_2 a_3)\hat{i} - (a_1 b_3 - b_1 a_3)\hat{j} + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\hat{k}$$

PROBLEMA 123 (Sem. CEPRE-UNI 2000-I)

Dados los vectores :

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\sqrt{3}\,\hat{j} \;\; ; \;\; \vec{B} = 4\hat{i}$$

Entonces $\vec{A}\cdot\vec{B}$ y $|\vec{A}\times\vec{B}|$ son respectivamente.

A) $8 \; ; 8\sqrt{3}$ B) $4 \; ; 2\sqrt{3}$

C) $8 \; ; 6\sqrt{3}$ D) $8\sqrt{3} \; ; 4$

E) Faltan datos

RESOLUCIÓN

Datos :

$$\vec{A} = (2, 2\sqrt{3}) \Rightarrow A = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$\vec{B} = (4, 0) \Rightarrow B = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$$

a) Cálculo del producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (2, 2\sqrt{3})\cdot(4, 0)$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (2\times4 + 2\sqrt{3}\times0)$$

$$\therefore \boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = 8} \;\; \textit{Rpta.}$$

b) Cálculo del producto vectorial (en módulo) : $|\vec{A}\times\vec{B}|$

Sabemos : $|\vec{A}\times\vec{B}| = AB\,sen\,\theta$

Pero :

Hallamos "θ" aprovechando el cálculo anterior

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

$$8 = 4\times4\times\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60°$$

Finalmente :

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB\,sen\,\theta = 4\times4\times sen\,60°$$

$$= 4\times4\times\sqrt{3}/2$$

$$\therefore \boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = 8\sqrt{3}} \;\; \textit{Rpta.}$$

Clave: A

PROBLEMA 124 (Sem. CEPRE-UNI 99-I)

Se dan los vectores : $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$; $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{k}$ y $\vec{c} = \hat{j} - \hat{k}$. Se pide evaluar el ángulo que forma los vectores $(\vec{a}+\vec{b})$ y $(\vec{a}+\vec{c})$.

A) $\cos^{-1}\left(\frac{6}{7\sqrt{6}}\right)$ B) $\cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$

C) $\cos^{-1}\left(\frac{12\sqrt{6}}{7}\right)$ D) $\cos^{-1}\left(\frac{7}{12\sqrt{6}}\right)$

E) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{7}\right)$

RESOLUCIÓN

Datos :

$$\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} = (2, 3, 0)$$

$$\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{k} = (-1, 0, 2)$$

$$\vec{c} = \hat{j} - \hat{k} = (0, 1, -1)$$

Calculamos $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{a}+\vec{c}$.

$$\vec{a}+\vec{b} = (1, 3, 2) = \vec{A}$$

$$\vec{a}+\vec{c} = (2, 4, -1) = \vec{B}$$

Hallemos ahora el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

(Graficarlo resultaría muy tedioso, mejor hacemos uso del producto escalar).

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

$$(1,3,2)\cdot(2,4,-1) = \sqrt{1^2+3^2+2^2}\,\sqrt{2^2+4^2+1^2}\cos\theta$$

$$1\times2 + 3\times4 + 2\times(-1) = (\sqrt{14})(\sqrt{21})\cos\theta$$

$$12 = 7\sqrt{6}\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{12}{7\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{7\times6}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{12}{7\sqrt{6}}\right)$$

$$ó \;\; \boxed{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)}$$

Clave: B

PROBLEMA 125 (Sem. CEPRE-UNI 99-II)

Se tienen los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, si : $\vec{B} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, el módulo de $\vec{A}$ es 4 y $\vec{A}\cdot\vec{B} = 6$, hallar el módulo del producto vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$.

A) 6 B) $4\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{3}$

D) $8\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{6}$

RESOLUCIÓN

Si : $\vec{B} = (2, 2, 1)$

$$\Rightarrow B = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9}$$

$$B = 3$$

Datos : $A = 4$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 6$$

Luego:

Podemos calcular el ángulo que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \quad \text{(definición)}$$

$$6 = 4\times3\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60°$$

$$\therefore sen\,\theta = sen\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nos piden : $|\vec{A}\times\vec{B}|$

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB\,sen\,\theta$$

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = 4\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = 6\sqrt{3}}$$

Clave: C

PROBLEMA 126 (Sem. CEPRE-UNI 2000-I)

Dados los vectores :

$$\vec{A} = 4\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$\vec{B} = 2\cos 8°\,\hat{i} + 2\,sen\,8°\,\hat{j}$$

Hallar el producto vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$.

A) $-\frac{12}{5}\sqrt{2}\,\hat{k}$ B) $\frac{12}{5}\sqrt{2}\,\hat{k}$

C) $\frac{\sqrt{2}}{5}\sqrt{2}\,\hat{k}$ D) $\frac{24}{5}\sqrt{2}\,\hat{k}$

E) $-\frac{24}{5}\sqrt{2}\,\hat{k}$

RESOLUCIÓN

Datos :

$$\vec{A} = (4, 4) = 4(1, 1)$$

$$\vec{B} = (2\cos 8°, 2\,sen\,8°) = 2(\cos 8°, sen\,8°)$$

Calculemos :

$$A = 4\sqrt{1^2 + 1^2} = 4\sqrt{2}$$

$$B = 2\sqrt{\cos^2 8° + sen^2 8°} = 2$$

Propiedad trigonométrica

$$\boxed{sen^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

Recordar :

$\vec{A}$ forma 45° con el eje X^+

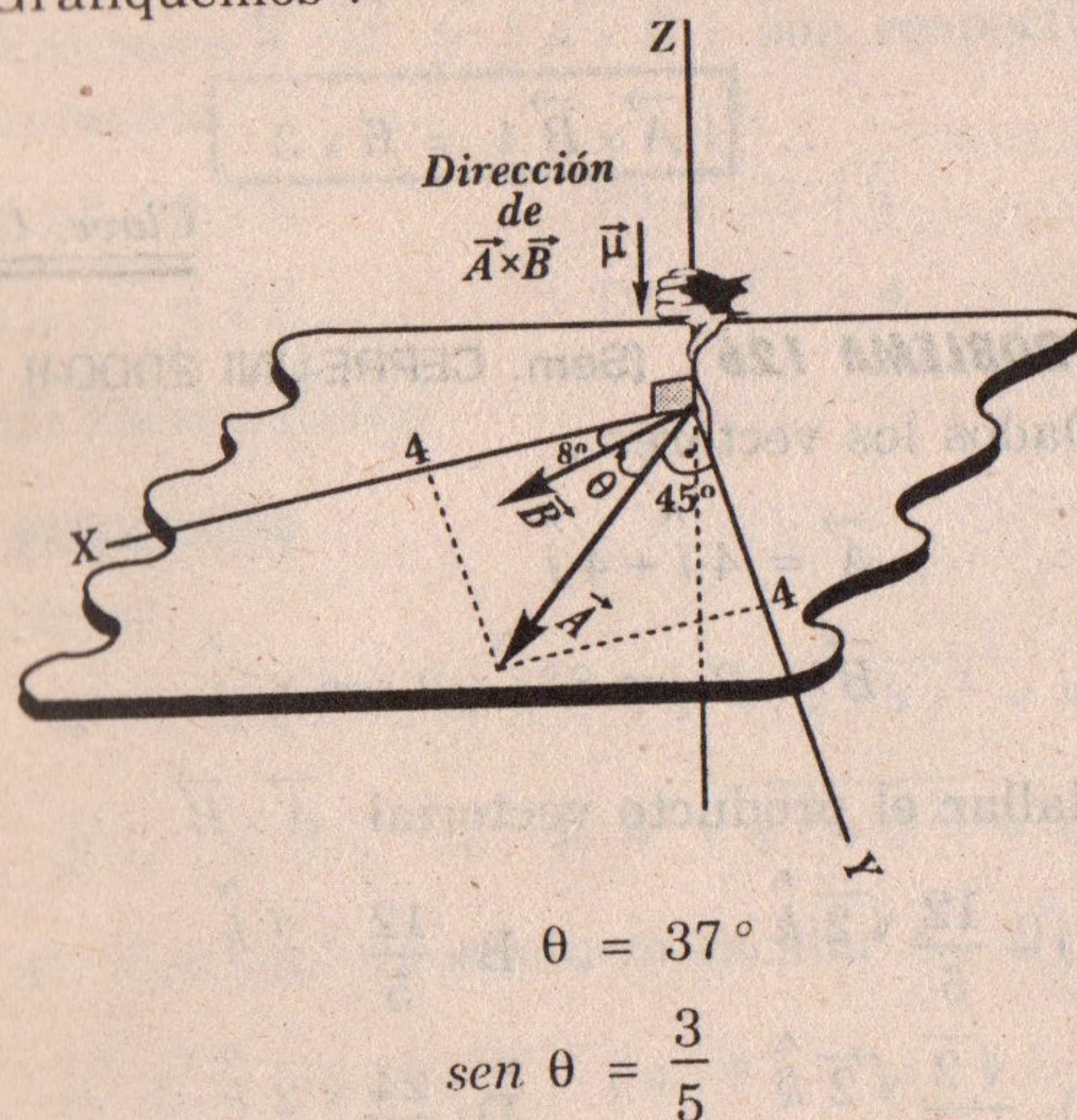
$\vec{B}$ forma 8° con el eje X^+

Luego :

$\vec{A}$ forma 37° con el vector $\vec{B}$

Grafiquemos :

$$\theta = 37°$$

$$sen\ \theta = \frac{3}{5}$$

Luego :

$$\vec{A}\times\vec{B} = (AB\ sen\ \theta)\ \vec{\mu}$$

Por la regla de la mano derecha :

$$\vec{\mu} = -\hat{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = (4\sqrt{2}\times 2\ sen\ 37°)(-\hat{k})$$

$$\therefore\quad \vec{A}\times\vec{B} = -\frac{24}{5}\sqrt{2}\ \hat{k}$$

Clave: E

PROBLEMA 127 (Sem. CEPRE-UNI 2000-II)

El producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{\alpha} = -25$. Si $\vec{A} = 5\hat{i}$, hallar dos vectores α cualesquiera que satisfagan la condición del producto escalar. (Trabajar en el plano cartesiano *XY*)

A) $\vec{\alpha} = 5\hat{i}$, $\vec{\alpha}' = -5\hat{i}+\hat{j}$

B) $\vec{\alpha} = 5\hat{i}$, $\vec{\alpha}' = 5i+\hat{j}$

C) $\vec{\alpha} = 5\hat{i}$, $\vec{\alpha}' = -5\hat{i}+4\hat{j}$

D) $\vec{\alpha} = -5\hat{i}$, $\vec{\alpha}' = -5\hat{i}+\hat{j}$

E) $\vec{\alpha} = -5\hat{i}$, $\vec{\alpha}' = 5\hat{i}+2\hat{j}$

RESOLUCIÓN

Nos dicen : $\vec{A}\cdot\vec{\alpha} = -25$

$\vec{A} = (5, 0)$ ... dato

Supongamos : $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$

Reemplazando :

$$\vec{A}\cdot\vec{\alpha} = -25$$

$$(5, 0)\cdot(\alpha_1, \alpha_2) = -25$$

$$5\alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0 = -25$$

$$5\alpha_1 = -25$$

$$\therefore\quad \alpha_1 = -5$$

Luego : El vector "α" para el cual cumple esta condición es :

$$\alpha = (-5, \alpha_2)$$

donde : $\alpha_2 \in$ IR

Nos piden 2 valores de "α" cualesquiera

$$\alpha = (-5, 0) = -5\hat{i}$$

$$\alpha = (-5, 1) = -5\hat{i}+\hat{j}$$

Clave: D

PROBLEMA 128 (Sem. CEPRE-UNI 98-I)

Hallar el vector unitario $\vec{\alpha}$ tal que el producto escalar $\vec{\alpha}\cdot(-2\hat{i}+\hat{j})$ sea mínimo.

A) $\dfrac{\hat{i}+2\hat{j}}{\sqrt{5}}$

B) $\dfrac{(2\hat{i}-\hat{j})}{\sqrt{5}}$

C) $\dfrac{\hat{i}-2\hat{j}}{\sqrt{5}}$

D) $\dfrac{-\hat{i}+2\hat{j}}{\sqrt{5}}$

E) Faltan Datos

RESOLUCIÓN

Nos dicen :

$$E = \vec{\alpha}\cdot(-2, 1)\ \text{es mínimo.}$$

¿Para cuál valor de $\vec{\alpha}$ cumple?

La solución será menos tediosa si hacemos :

$$\vec{\alpha} = (\cos\theta, sen\ \theta)$$

Definición de vector unitario

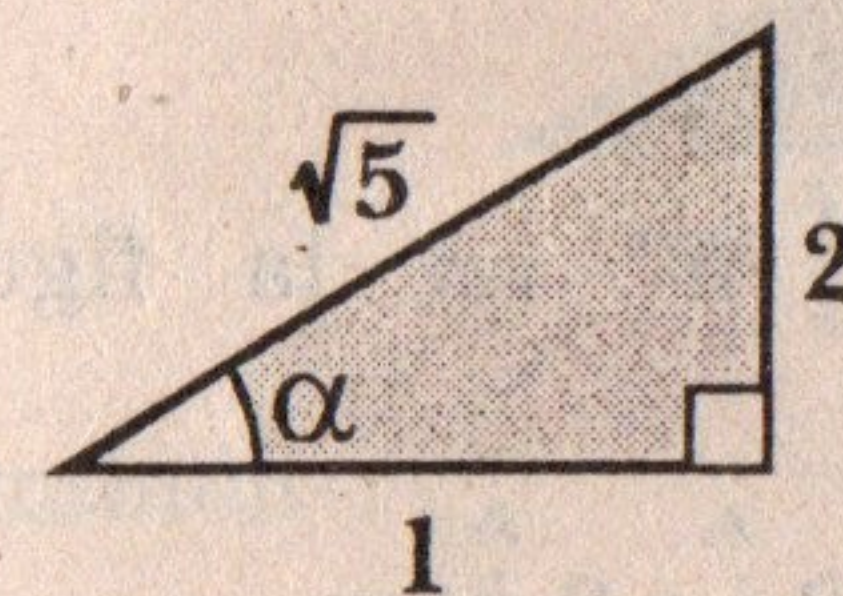
Luego :

$$E = (\cos\theta, sen\ \theta)\cdot(-2, 1)$$

$$E = -2\cos\theta + sen\ \theta$$

$$E = sen\ \theta - 2\cos\theta$$

Hacemos un artificio matemático

(Triángulo rectángulo de catetos 1 y 2, hipotenusa $\sqrt{5}$, ángulo α)

$$\cos\alpha = 1/\sqrt{5}$$

$$sen\ \alpha = 2/\sqrt{5}$$

En la expresión "*E*" damos forma :

$$E = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\ sen\ \theta - \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta\right)\sqrt{5}$$

$$E = \sqrt{5}\ (sen\ \theta\cos\alpha - sen\ \alpha\cos\theta)$$

$$E = \sqrt{5}\ sen\ (\theta - \alpha)$$

La función seno varía : $[-1, +1]$

Es mínimo si $sen\ (\theta - \alpha) = -1$

$$\theta - \alpha = 270°$$

$$\therefore\quad \theta = 270° + \alpha$$

Si "θ" ∈ IV C :

$$sen\ \theta = sen\ (270 + \alpha) = -\cos\alpha = -2/\sqrt{5}$$

$$\cos\theta = \cos(270 + \alpha) = sen\ \alpha = 1/\sqrt{5}$$

Luego :

El vector unitario $\vec{\alpha} = (\cos\theta, sen\ \theta)$ será.

$$\therefore\quad \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\hat{i}-\hat{j})$$

Clave: B

PROBLEMA 129 (Sem. CEPRE-UNI 2000-II)

Dados los vectores :

$$\vec{A} = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\quad y\quad \vec{B} = 4\hat{i}+6\hat{j}$$

Hallar el cociente entre la proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$ y la proyección de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$

A) 0,02 B) 0,321 C) 0,746

D) $\dfrac{\sqrt{377}}{13}$ E) 0,241

RESOLUCIÓN

Datos : $\vec{A} = (2, 3, 4)$

$\vec{B} = (4, 6, 0)$

Recordemos : $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

$$Proy_{\vec{B}}\vec{A} = A\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{B}\quad \text{¡Teoría!}$$

$$Proy_{\vec{A}}\vec{B} = \frac{\vec{B}\cdot\vec{A}}{A}\quad \text{¡Teoría!}$$

Nos piden :

$$E = \frac{Proy_{\vec{B}}\vec{A}}{Proy_{\vec{A}}\vec{B}} = \frac{\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{B}}{\dfrac{\vec{B}\cdot\vec{A}}{A}} = \frac{(\vec{A}\cdot\vec{B})(A)}{(\vec{B}\cdot\vec{A})(B)}$$

$$E = \frac{Proy_{\vec{B}}\vec{A}}{Proy_{\vec{A}}\vec{B}} = \frac{A}{B}$$

$$E = \frac{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}{\sqrt{4^2+6^2+0^2}}$$

$$E = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{52}}$$

$$\therefore \quad \boxed{E = \frac{\sqrt{377}}{26} \approx 0{,}746}$$

Clave: C

PROBLEMA 130 (Sem. CEPRE-UNI 2000-II)

La suma de los vectores $\vec{A}_1$ y $\vec{A}_2$ es $(\hat{i}+3\hat{j})$ y la diferencia $\vec{A}_1-\vec{A}_2 = 3\hat{i}-\hat{j}$. Hallar el ángulo entre $\vec{A}_1$ y $\vec{A}_2$.

A) 90° B) 0° C) 30°
D) 60° E) 180°

RESOLUCIÓN

Nos piden "θ", ángulo entre $\vec{A}_1$ y $\vec{A}_2$

Datos :

$$\left.\begin{aligned} \vec{A}_1+\vec{A}_2 &= \hat{i}+3\hat{j} \\ \vec{A}_1-\vec{A}_2 &= 3\hat{i}-\hat{j} \end{aligned}\right\} (+)$$

$$2\vec{A}_1 = 4\hat{i}+2\hat{j}$$

$$\vec{A}_1 = 2\hat{i}+\hat{j}$$

Del mismo modo obtenemos

$$\vec{A}_2 = -\hat{i}+2\hat{j}$$

También

$$A_1 = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

$$A_2 = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

Por teoría del producto escalar :

$$\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 = (A_1)(A_2)\cos\theta$$

$$(2,1)\cdot(-1,2) = \sqrt{5}\sqrt{5}\cos\theta$$

$$-2+2 = 5\cos\theta$$

$$0 = 5\cos\theta$$

$$\cos\theta = 0$$

$$\therefore \quad \boxed{\theta = 90°}$$

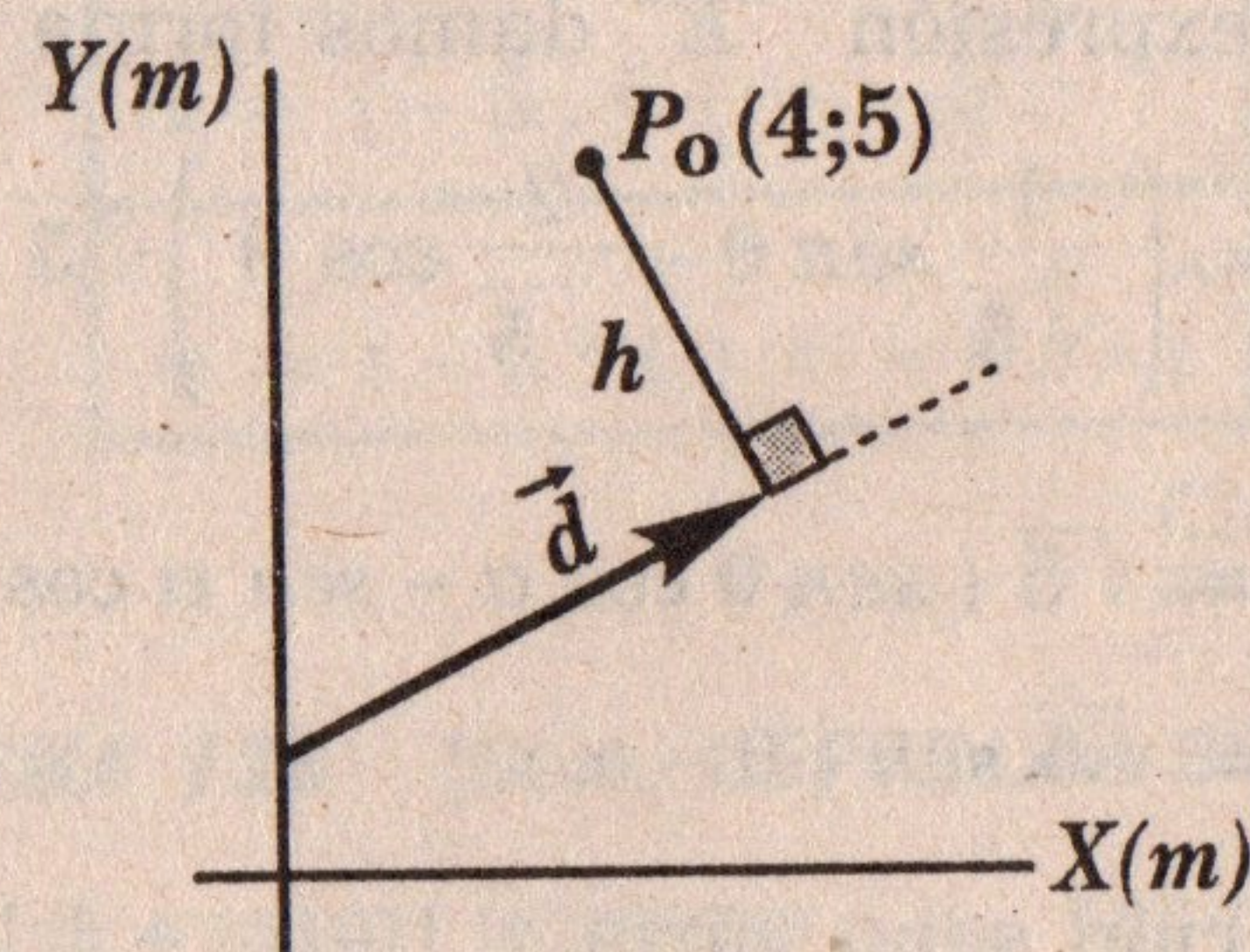
Clave: A

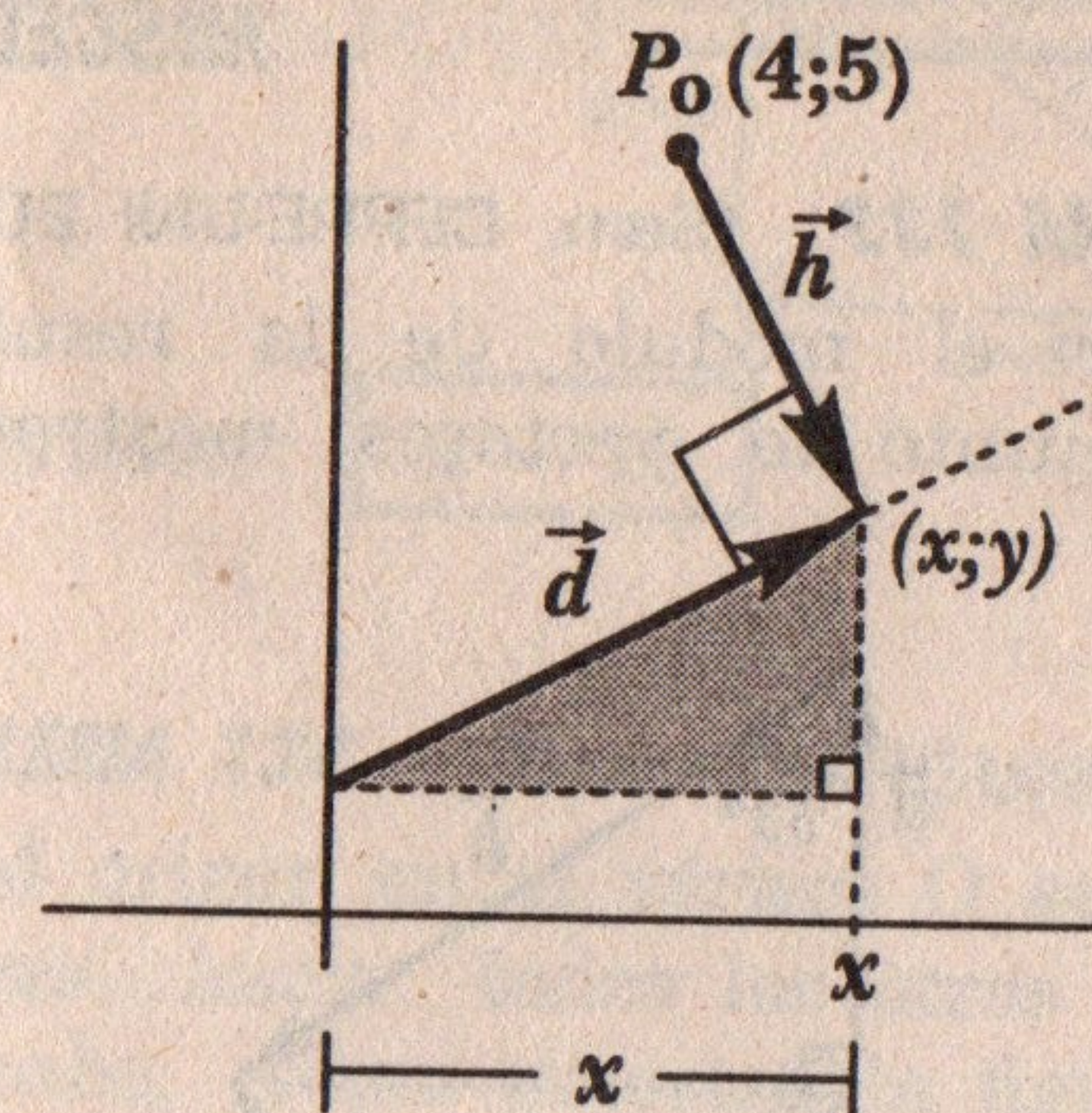
Nota:

Si el producto escalar de 2 vectores es cero, es porque el ángulo que forman es 90°.

PROBLEMA 131

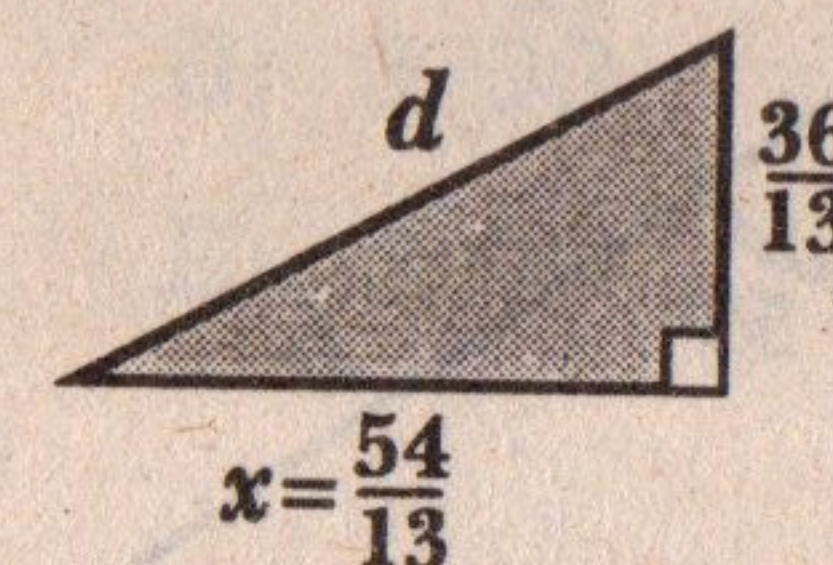
Hallar la distancia "h" en la figura mostrada, si :

$$\vec{d} = \left(\frac{18}{13}\right)(3\hat{i}+2\hat{j})\,m$$

A) $\sqrt{18}$ B) $(\sqrt{13})^{-1}$ C) $\sqrt{13}$
D) $\frac{18}{\sqrt{13}}$ E) $\frac{2}{\sqrt{13}}$

RESOLUCIÓN

Dato :

$$\vec{d} = \frac{18}{13}(3\hat{i}+2\hat{j})$$

$$\vec{d} = \left(\frac{54}{13},\frac{36}{13}\right)$$

Observamos

También :

$$\vec{h} = (x,y)-(4,5)$$

$$\vec{h} = (x-4,y-5)$$

Pero :

$$x-4 = \frac{54}{13}-4 \Rightarrow x-4 = \frac{2}{13}$$

Por teoría de producto escalar :

$$\vec{h}\cdot\vec{d} = (h)(d)\cos 90°$$

$$\therefore \quad \vec{h}\cdot\vec{d} = 0$$

Luego :

$$(x-4,y-5)\cdot\left(\frac{54}{13},\frac{36}{13}\right) = 0$$

$$\frac{54}{13}(x-4)+\frac{36}{13}(y-5) = 0$$

$$\frac{54}{13}\left(\frac{2}{13}\right)+\frac{36}{13}(y-5) = 0$$

$$\therefore \quad y-5 = -\frac{3}{13}$$

Luego :

$$\vec{h} = \left(\frac{2}{13},\frac{-3}{13}\right) = \frac{1}{13}(2,-3)$$

$$h = \frac{1}{13}\sqrt{2^2+3^2}$$

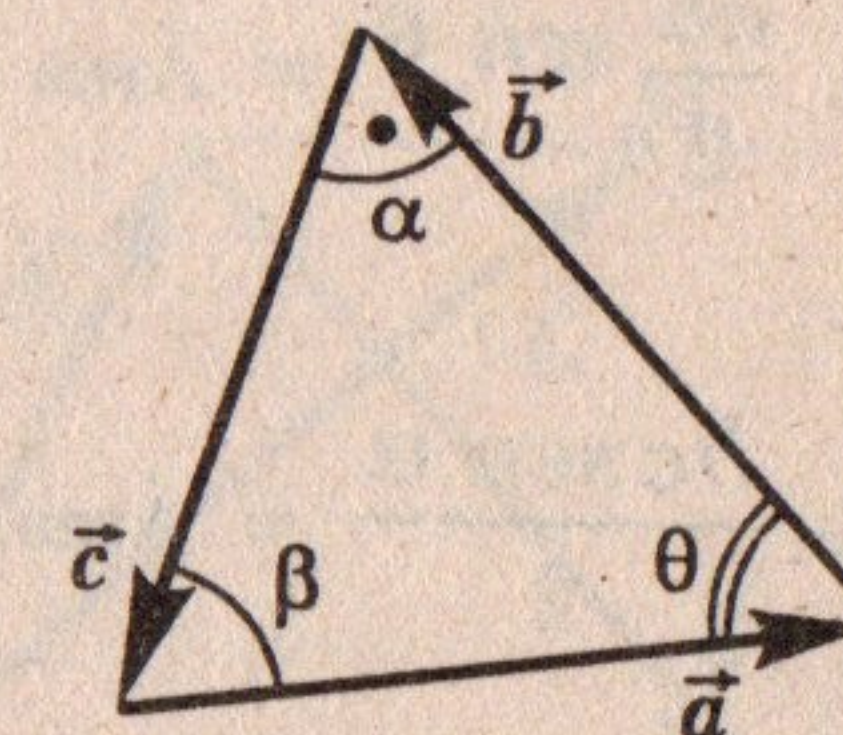
$$\therefore \quad \boxed{h = \frac{\sqrt{13}}{13}}$$

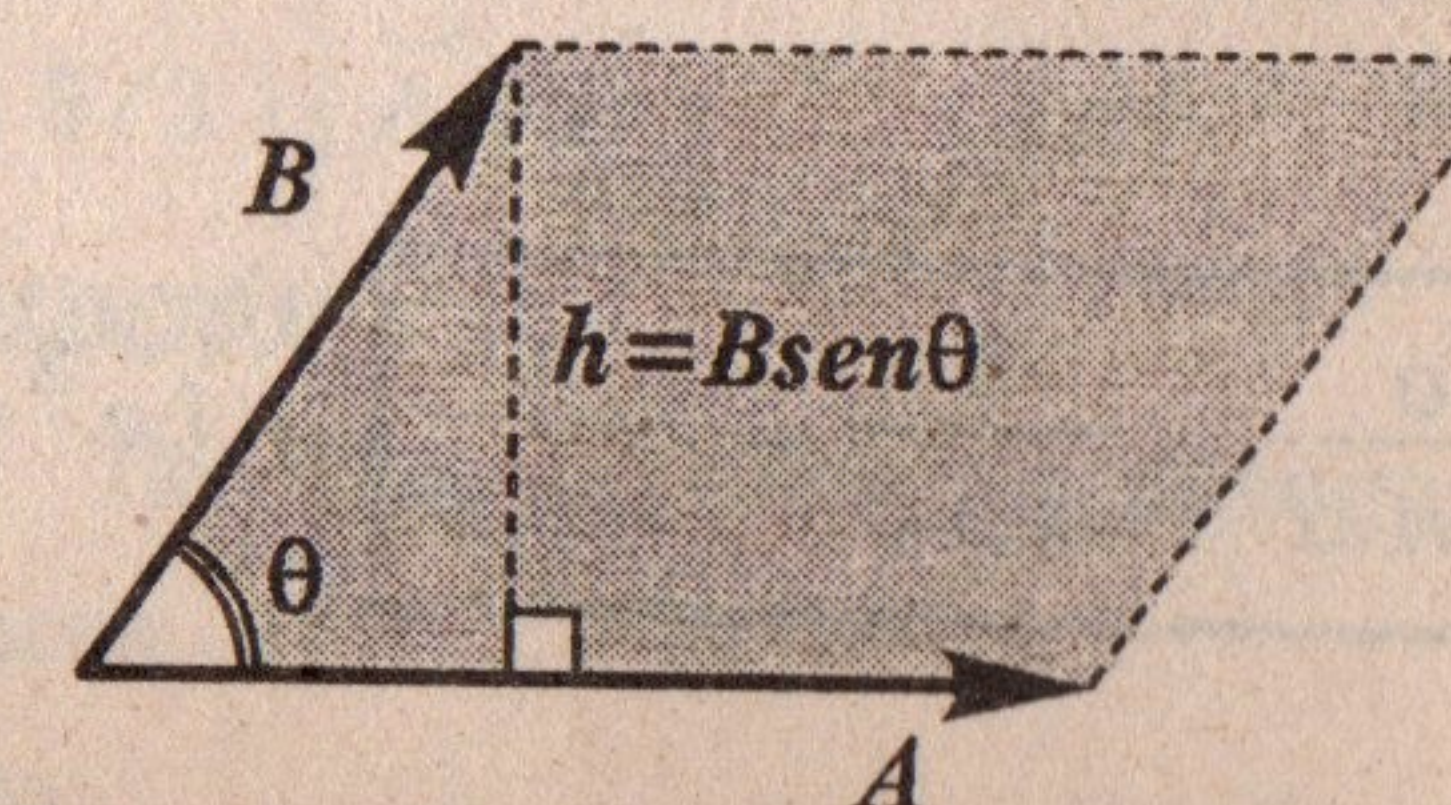
Clave: B

PROBLEMA 132 (Sem. CEPRE-UNI 2000-II)

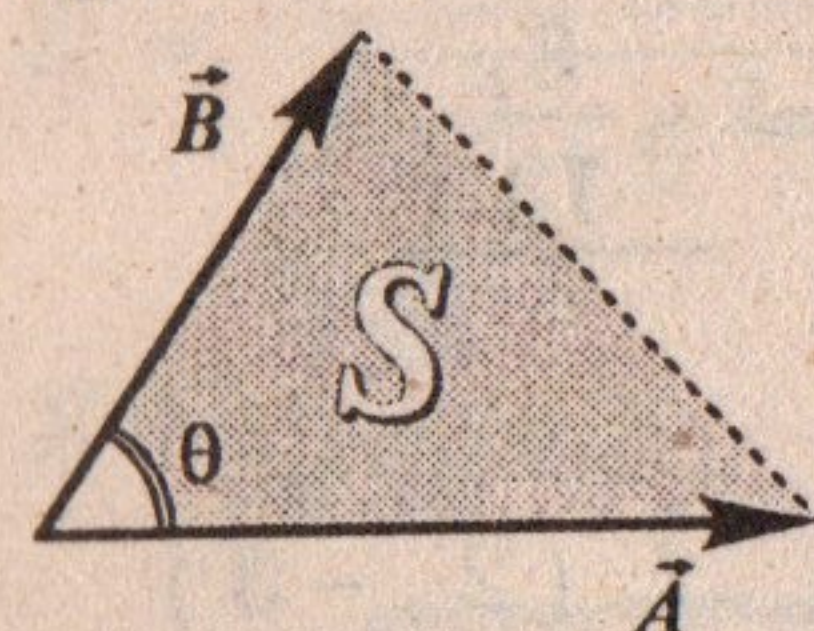
Para el triángulo de la figura deducir la ley de los senos .

$$\boxed{\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{b}{sen\ \beta} = \frac{c}{sen\ \theta}}$$

Sugerencia : Use la definición del producto vectorial.

RESOLUCIÓN

Recordar : (teoría)

$$\text{Área}_{\square} = A \times h$$

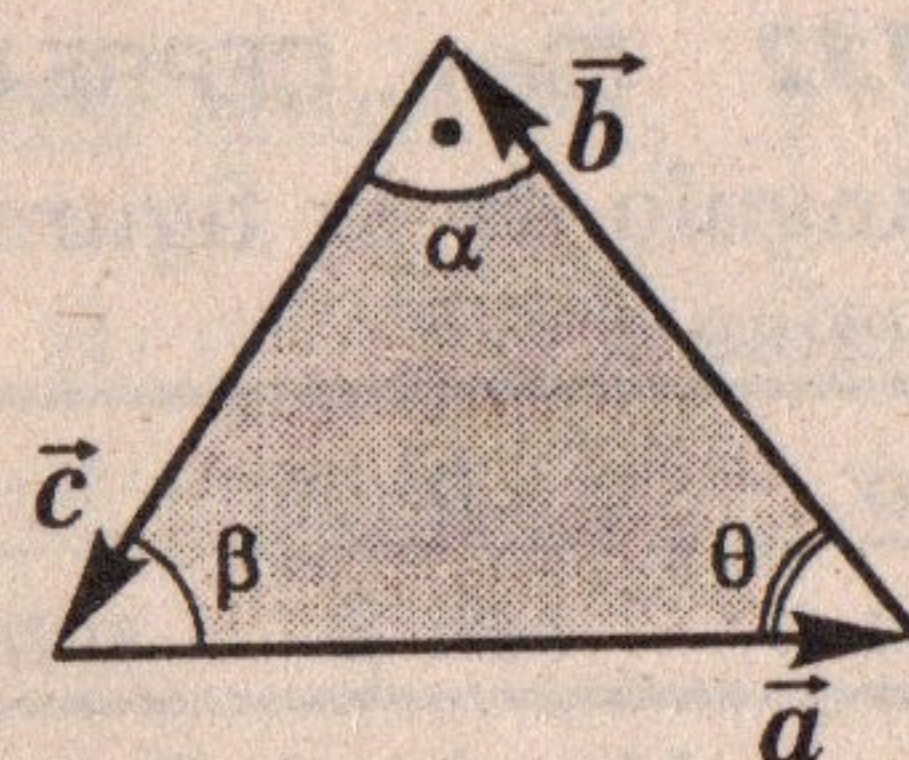
$$\boxed{\text{Área}_{\square} = |\vec{A} \times \vec{B}|}$$

Luego :

$$\boxed{S = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{2}}$$

En el problema.

Recordar : $|\vec{a}| = |-\vec{a}| = a$

Luego :

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |-\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\left|\frac{-\vec{a} \times \vec{b}}{2}\right| = \frac{ab}{2} \operatorname{sen} \theta = \text{Área del triángulo}$$

$$\frac{|-\vec{b} \times \vec{c}|}{2} = \frac{bc \operatorname{sen} \alpha}{2} = \text{Área del triángulo}$$

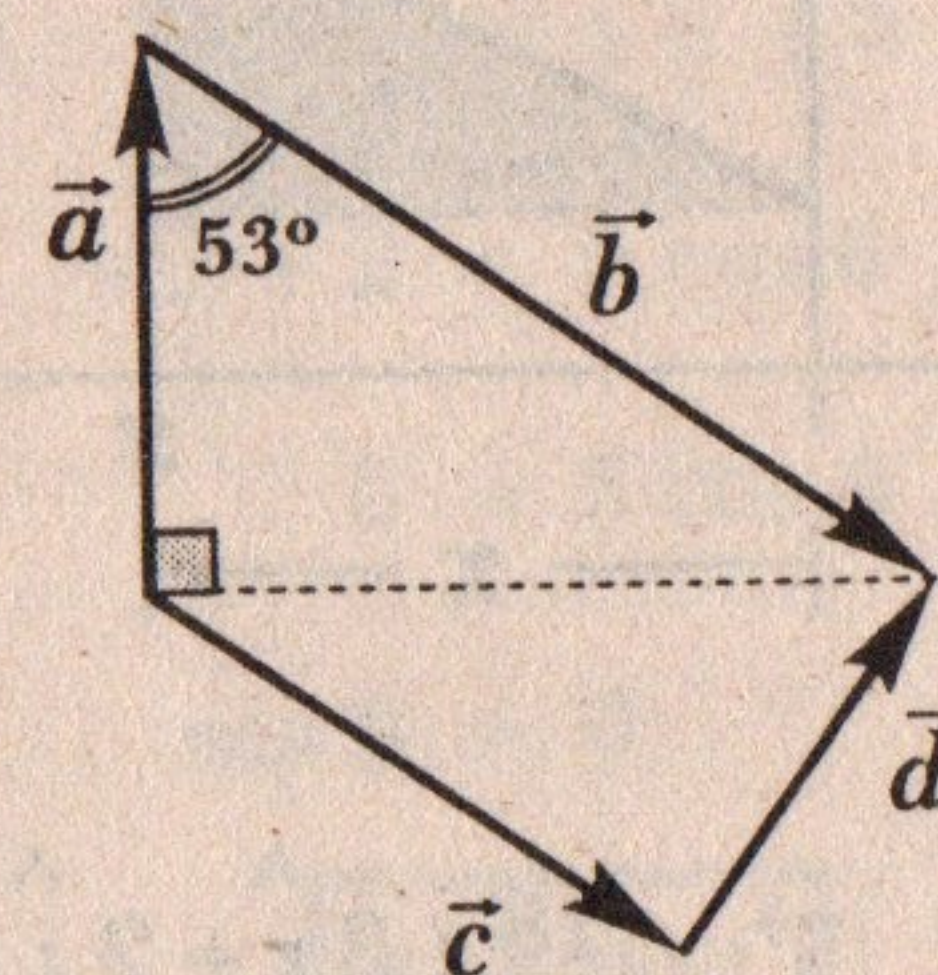
$$\frac{|-\vec{c} \times \vec{a}|}{2} = \frac{c\,a \operatorname{sen} \beta}{2} = \text{Área del triángulo}$$

Igualando dos a dos las expresiones, obtenemos

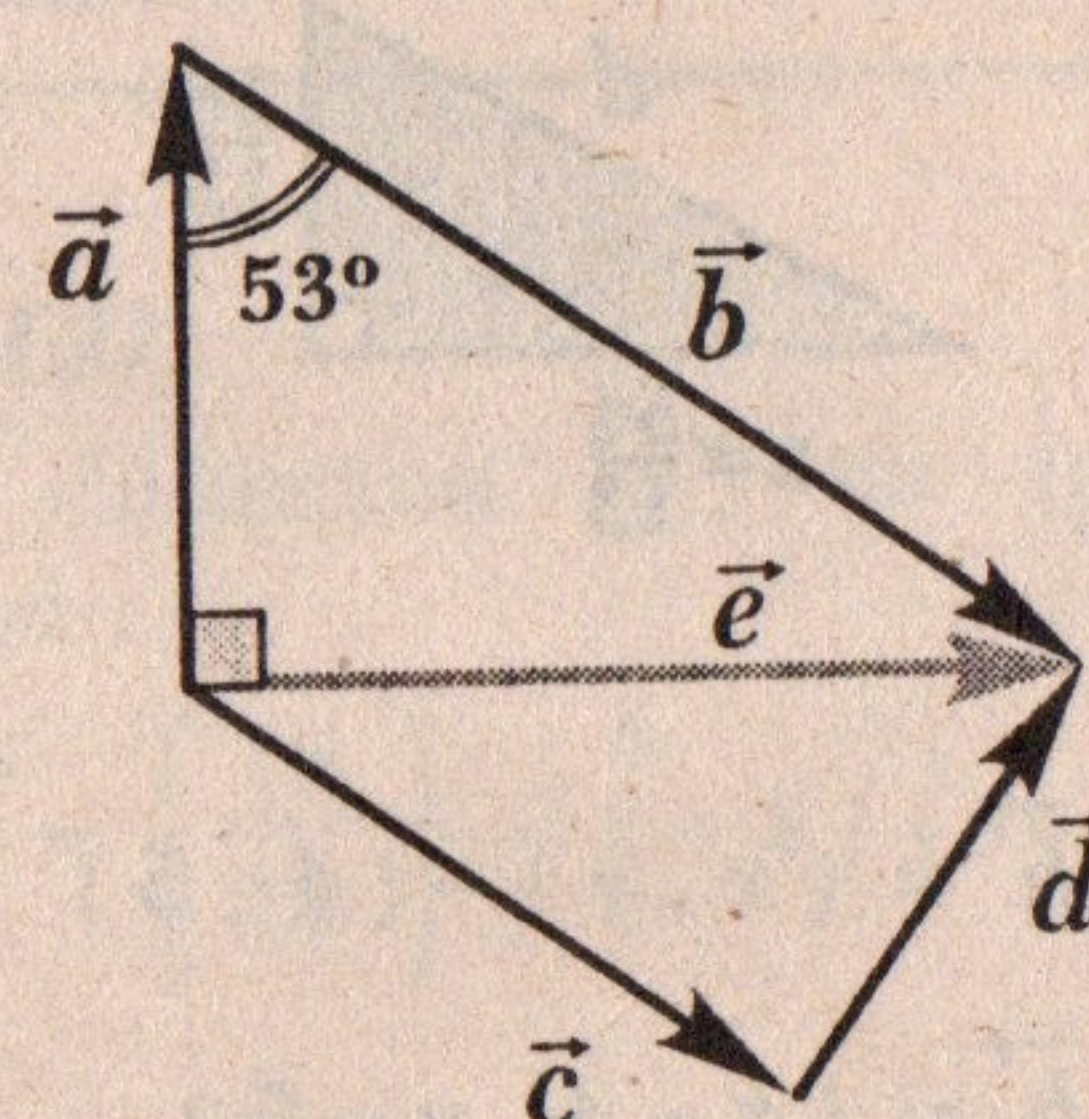
$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \theta}} \quad l.q.^2 d$$

MISCELÁNEA

PROBLEMA 133 (Sem. CEPRE-UNI 2001-I)

Calcular el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrados si $b = 10$.

A) 4 B) 8 C) 12
D) 16 E) 20

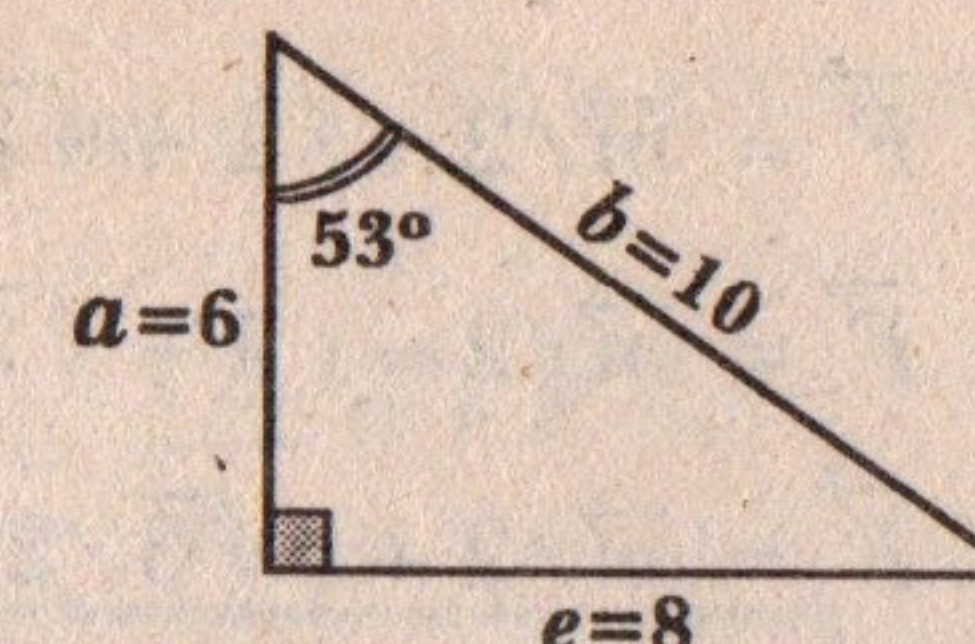
RESOLUCIÓN

En la figura :

* Agregando un vector $\vec{e}$.
* Notamos : $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{e} = \vec{c} + \vec{d}$

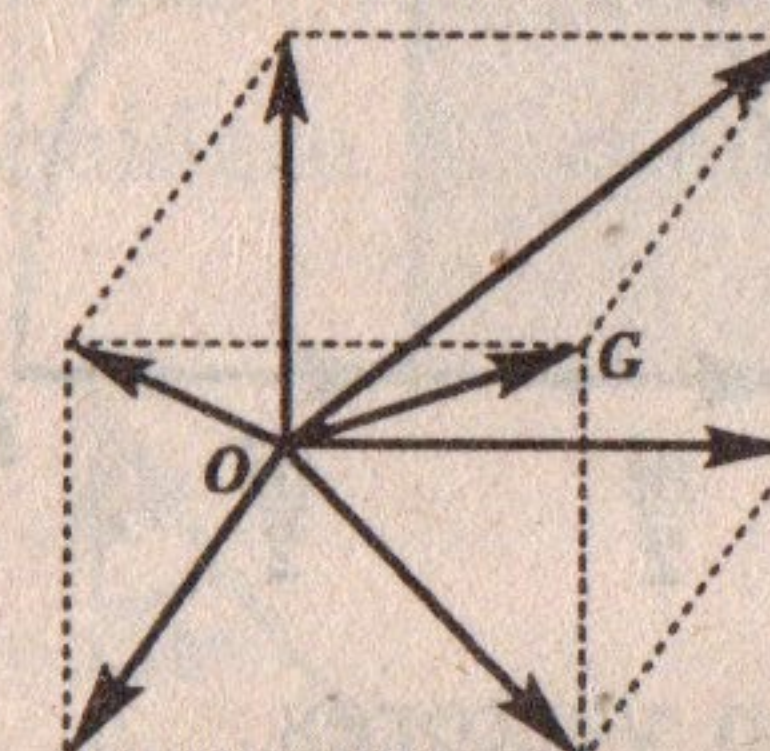
Luego :

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$
$$\vec{R} = \vec{e} + \vec{e}$$
$$\vec{R} = 2\vec{e}$$
$$|\vec{R}| = 2e$$

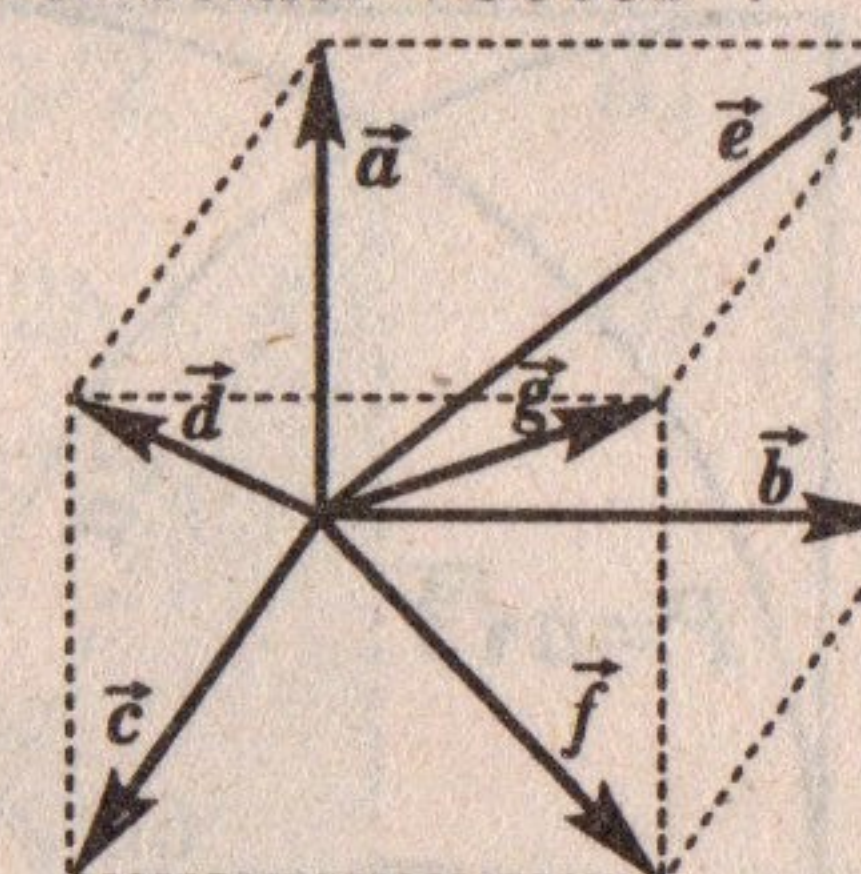
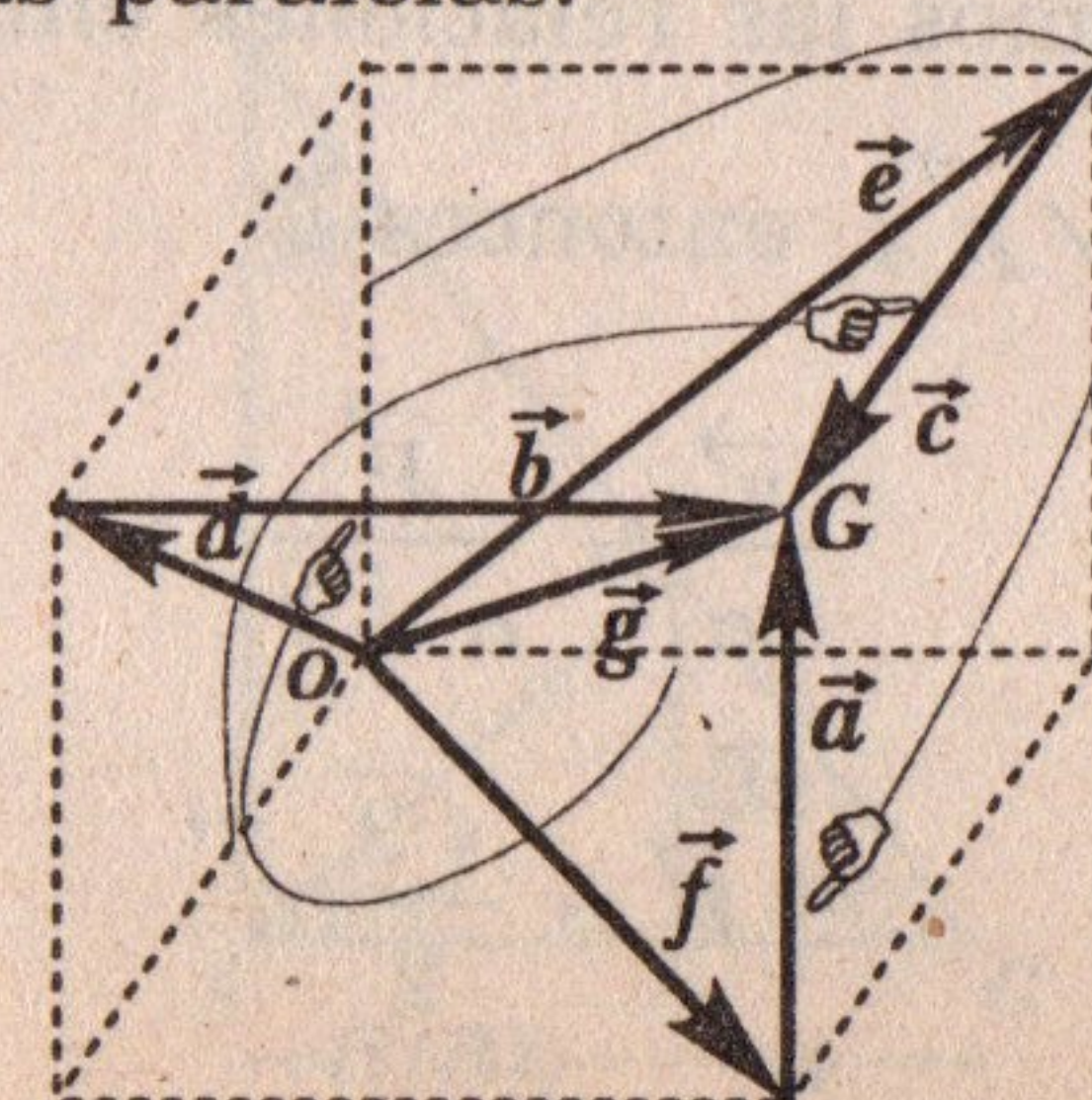
Por geometría :

Concluimos : $\boxed{R = 16}$

Clave: D

PROBLEMA 134 (Sem. CEPRE-UNI 2001-I)

Con el origen en el vértice O se trazan vectores hacia todos los otros vértices del cubo, como muestra la figura. El vector resultante de todos estos vectores, en términos del vector $\vec{OG}$, es igual a :

A) $2\vec{OG}$ B) $3\vec{OG}$ C) $4\vec{OG}$
D) $5\vec{OG}$ E) $6\vec{OG}$

RESOLUCIÓN

Denotando a cada vector :

Trasladamos los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ sobre líneas paralelas.

* En las regiones sombreadas, notamos:

$$\vec{g} = \vec{e} + \vec{c}$$
$$\vec{g} = \vec{f} + \vec{a}$$
$$\vec{g} = \vec{d} + \vec{b}$$

Sumando las expresiones

$$3\vec{g} = \vec{e} + \vec{f} + \vec{d} + \vec{c} + \vec{a} + \vec{b}$$
$$\vec{g} + 3\vec{g} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} + \vec{g}$$
$$4\vec{g} = \vec{R}$$

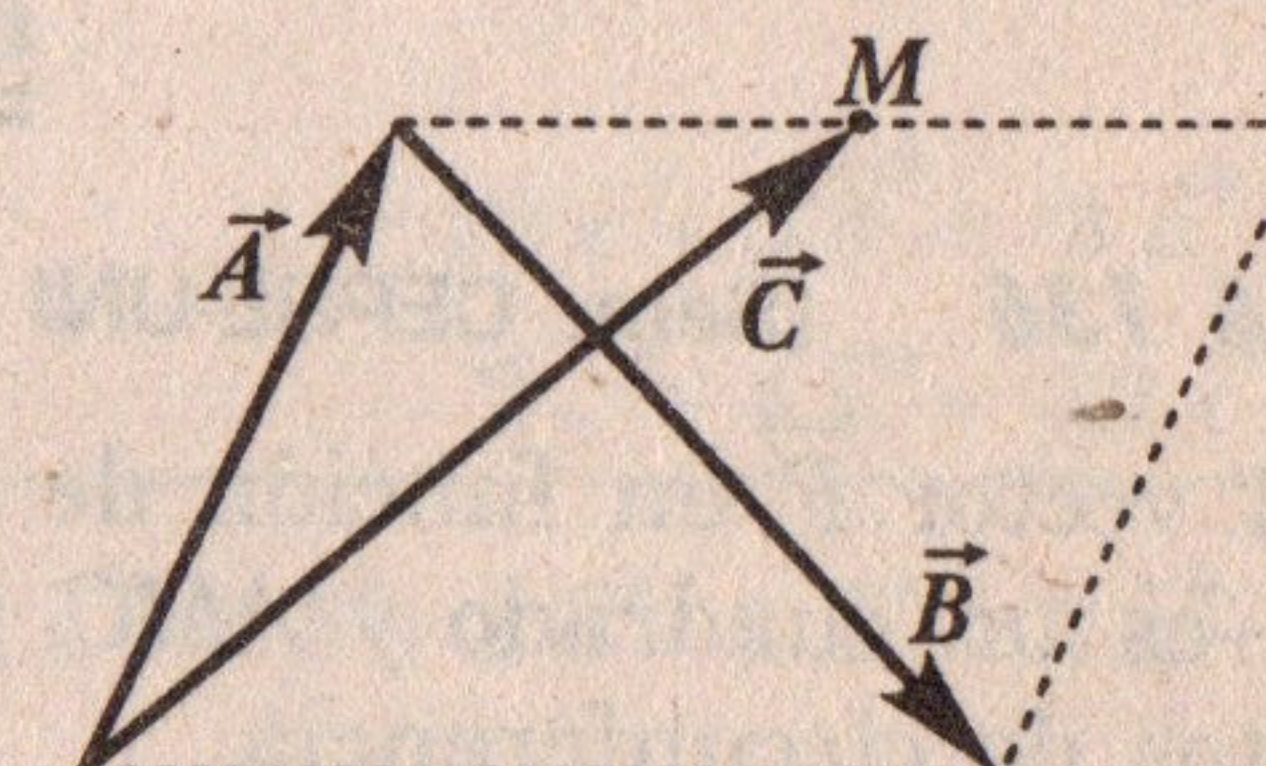
Pero : $\vec{OG} = \vec{g}$

Luego :

$$\boxed{\vec{R} = 4\vec{OG}}$$

Clave: C

PROBLEMA 135 (Sem. CEPRE-UNI 2001-I)

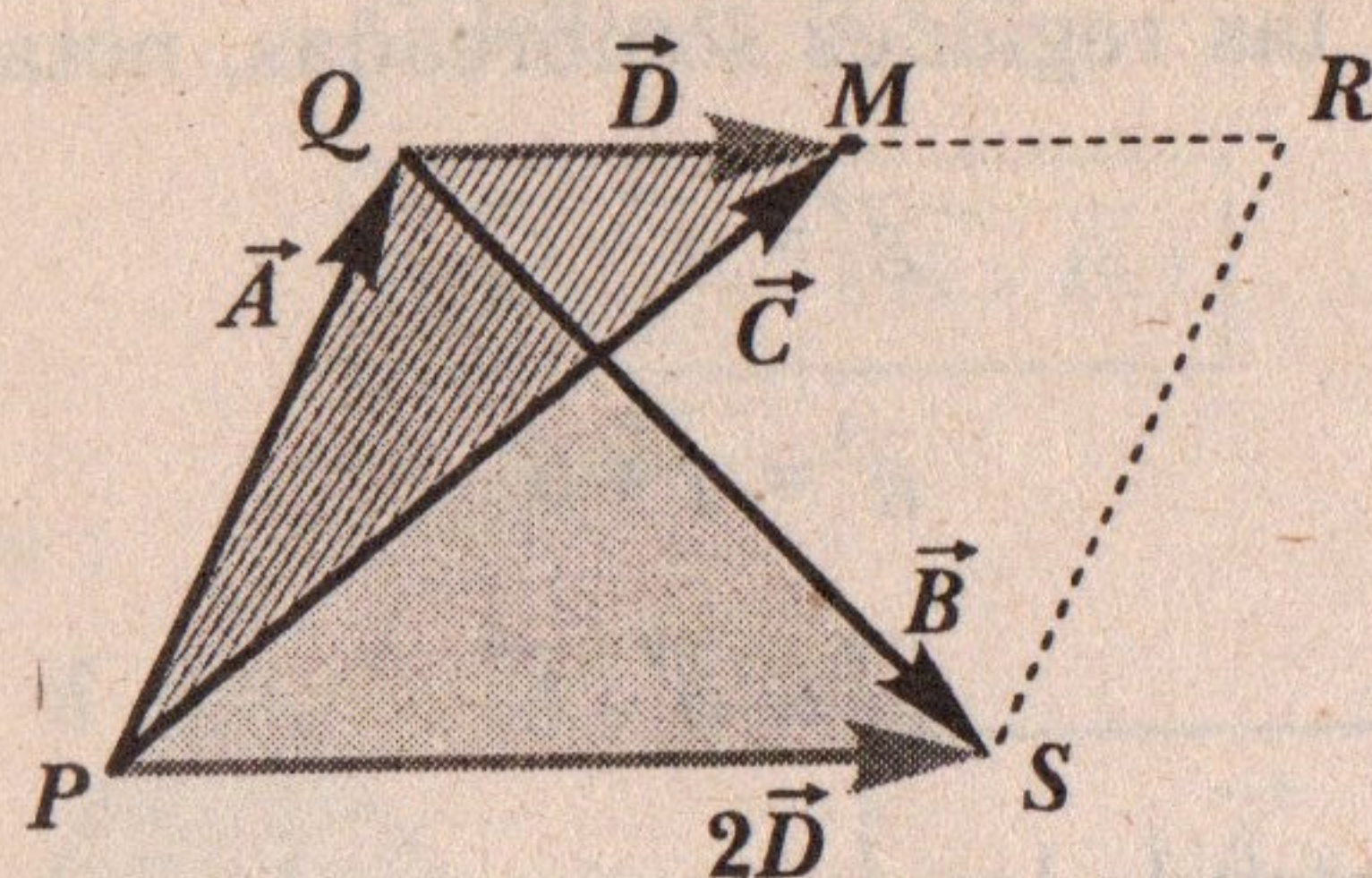
Si M es punto medio del paralelogramo que se muestra, expresar el vector $\vec{C}$ en términos de los vectores $\vec{B}$ y $\vec{A}$.

A) $3\vec{A} + \vec{B}$ B) $(1/2)(3\vec{A} + \vec{B})$
C) $3\vec{A} - \vec{B}$ D) $(1/2)(3\vec{A} - \vec{B})$
E) $(3/2)(\vec{A} + \vec{B})$

RESOLUCIÓN

Para facilitar la solución agregamos los vectores $\vec{D}$ y $2\vec{D}$.

Luego :

En el $\Delta\, PQM$:

$$\vec{A}+\vec{D}=\vec{C}$$

$$2\vec{A}+2\vec{D}=2\vec{C} \quad \ldots (I)$$

En el $\Delta\, PQS$:

$$\vec{A}+\vec{B}=2\vec{D} \quad \ldots (II)$$

Sumando (I) + (II) :

$$3\vec{A}+2\vec{D}+\vec{B}=2\vec{C}+2\vec{D}$$

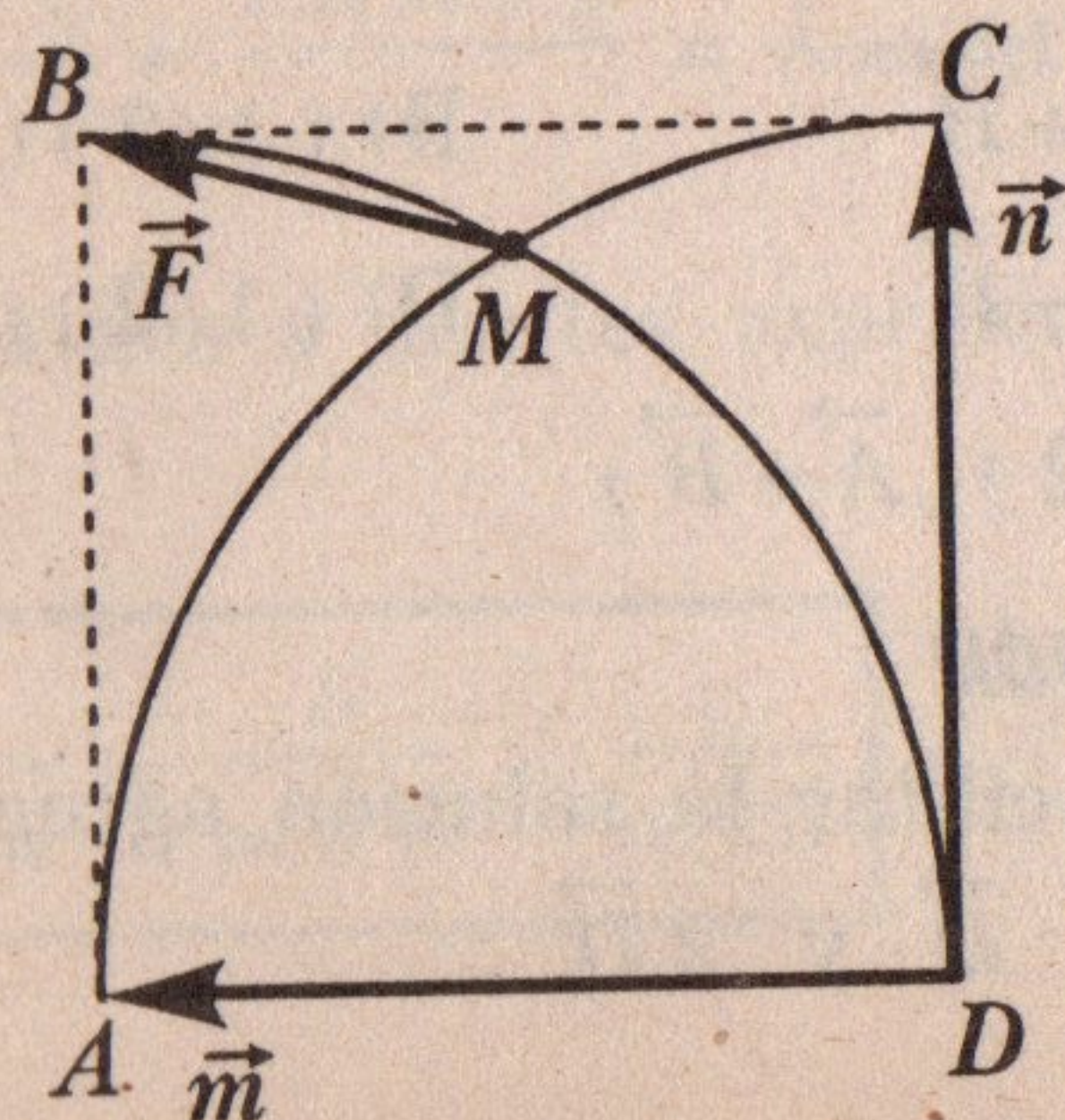
Resolviendo :

$$3\vec{A}+\vec{B}=2\vec{C}$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{C}=\frac{(3\vec{A}+\vec{B})}{2}}$$

Clave: B

PROBLEMA 136 (Sem. CEPRE-UNI 2001-I)

Hallar el vector $\vec{F}$ en función de m y n, si $ABCD$ es un cuadrado y AMC y DMB son cuartos de circunferencia.

A) $\vec{F}=\vec{m}/2+(1-\sqrt{3}/2)\,\vec{n}$

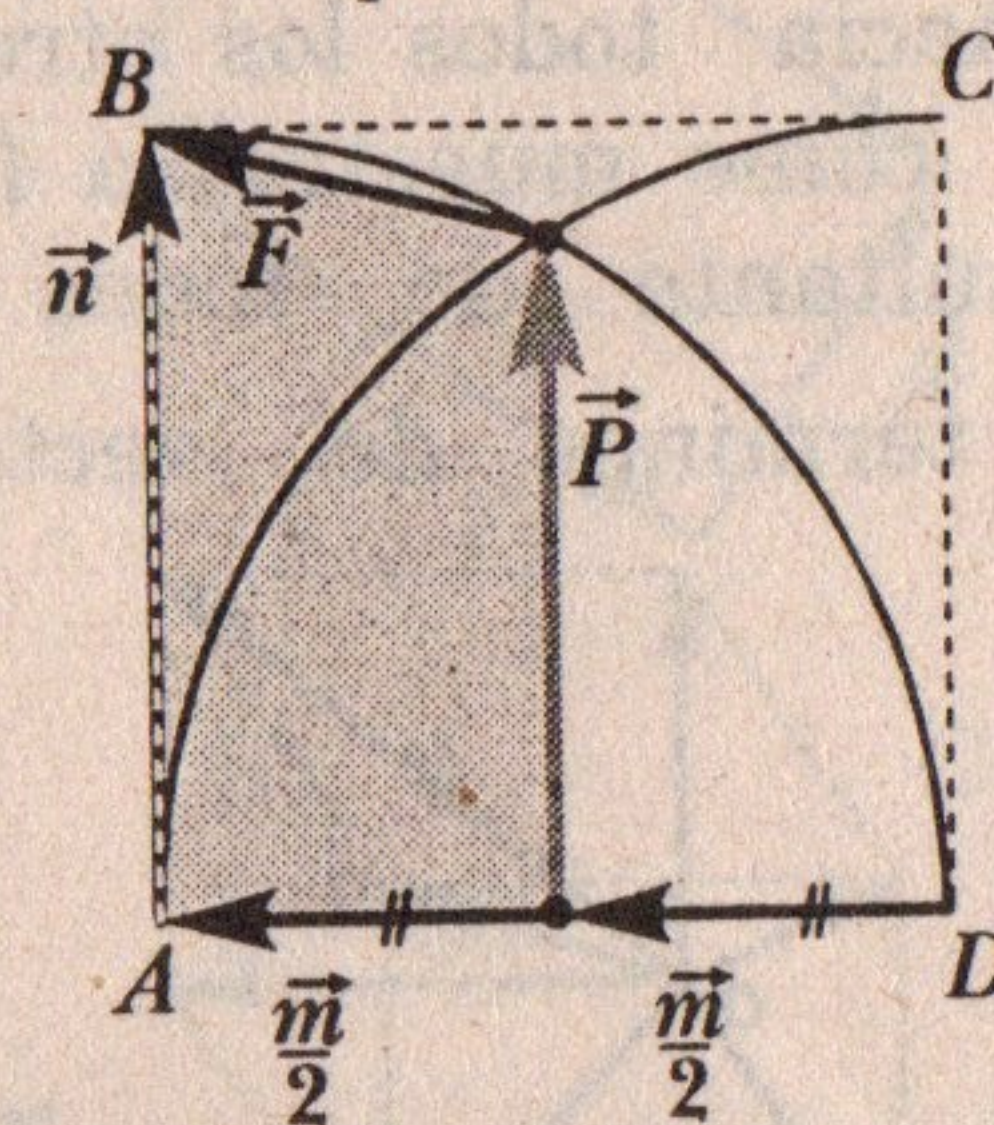
B) $\vec{F}=\vec{m}/2-(1-\sqrt{3}/2)\,\vec{n}$

C) $\vec{F}=\vec{m}/2+(\sqrt{3}/2)\,\vec{n}$

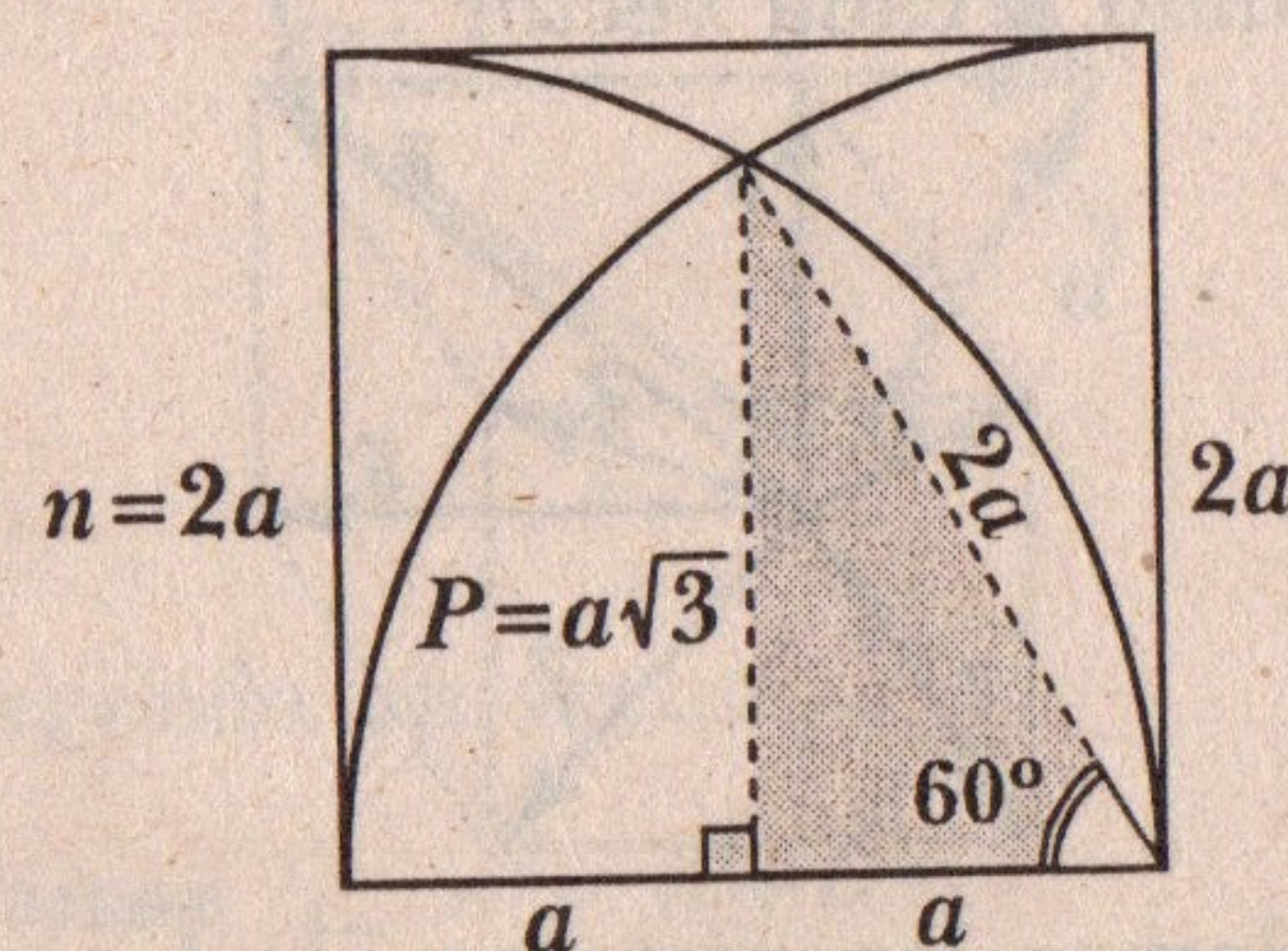
D) $\vec{F}=\vec{m}+(\sqrt{3}/2-1)\,\vec{n}$

E) $\vec{F}=\vec{m}-(\sqrt{3}/2-1)\,\vec{n}$

RESOLUCIÓN

En la figura del problema :

* Trasladando vectores
* En la parte sombreada

$$\frac{\vec{m}}{2}+\vec{n}=\vec{P}+\vec{F} \quad \ldots (I)$$

Haciendo uso de la geometría

* Obtenemos las relaciones entre n y p.
* Si $\vec{n}\,//\,\vec{p}$, entonces :

$$\frac{\vec{n}}{2a}=\frac{\vec{P}}{a\sqrt{3}}$$

$$\vec{P}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{n} \quad \ldots (II)$$

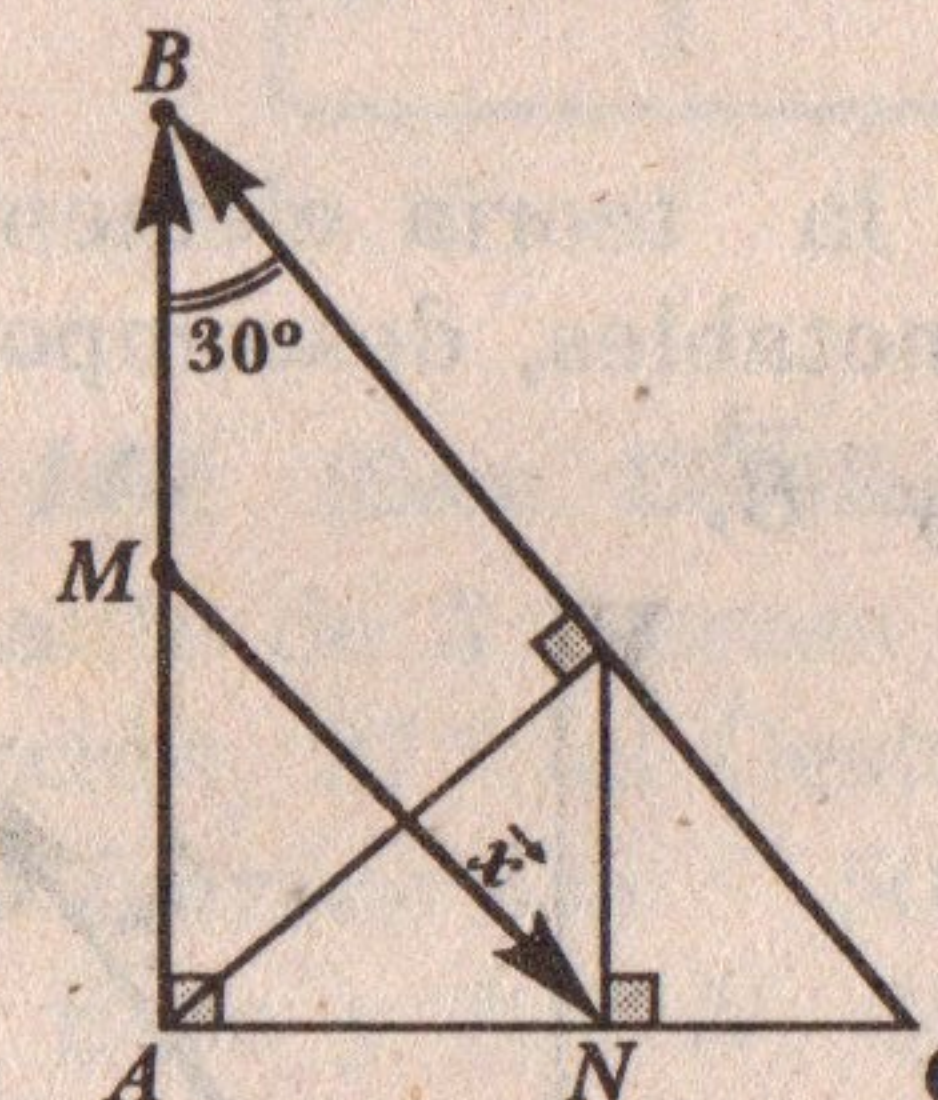
Reemplazando (II) en (I) :

$$\frac{\vec{m}}{2}+\vec{n}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{n}+\vec{F}$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{F}=\frac{\vec{m}}{2}+\vec{n}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Clave: A

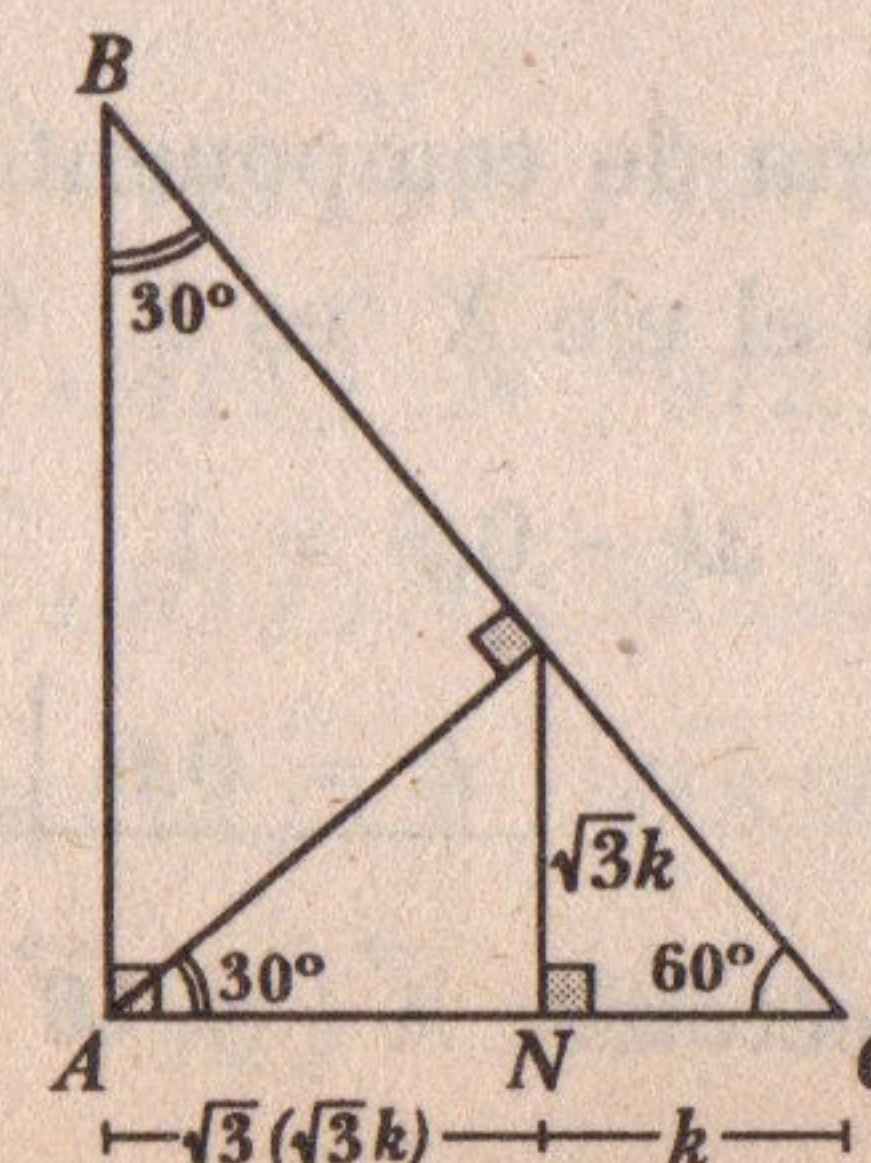
PROBLEMA 137

En la figura se muestra un sistema de vectores. Expresar al vector $\vec{x}=\vec{MN}$ en función de los vectores $\vec{a}=\vec{AB}$ y $\vec{b}=\vec{CB}$, considere M como punto medio de AB .

A) $(\vec{a}-\vec{b})/2$ B) $(2\vec{a}-\vec{b})/3$

C) $(3\vec{a}-2b)/4$ D) $(4\vec{a}-\vec{b})/3$

E) $(\vec{a}-3\vec{b})/4$

RESOLUCIÓN

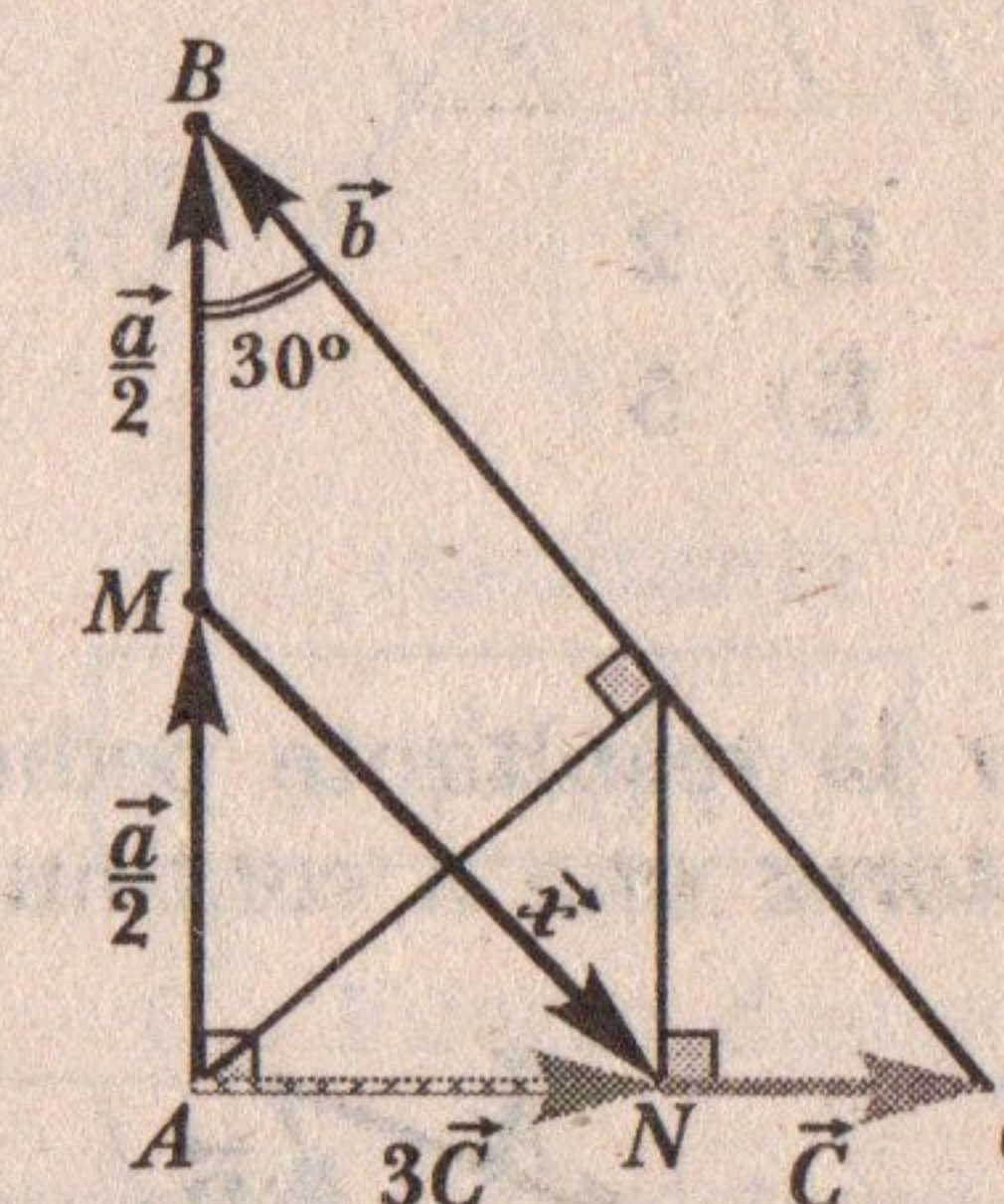
Aplicando geometría elemental calculemos algunos segmentos del triángulo.

Podemos notar :

$$AN=\sqrt{3}\,(\sqrt{3}\,k)=3k$$

$$NC=k$$

Luego : $\vec{AN}=3\,\vec{NC}$

Para facilitar la solución del problema, agregamos vectores.

Luego :

* En el $\triangle ABC$:

$$4\vec{c}+\vec{b}=\vec{a} \quad \ldots (I)$$

* En el $\triangle AMN$:

$$\frac{\vec{a}}{2}+\vec{x}=3\vec{c} \quad \ldots (II)$$

Multiplicando (I) × 3 y (II) × 4 y sumando :

$$12\vec{c}+3\vec{b}=3\vec{a}$$

$$2\vec{a}+4\vec{x}=12\vec{c}$$

$$12\vec{c}+3\vec{b}+2\vec{a}+4\vec{x}=3\vec{a}+12\vec{c}$$

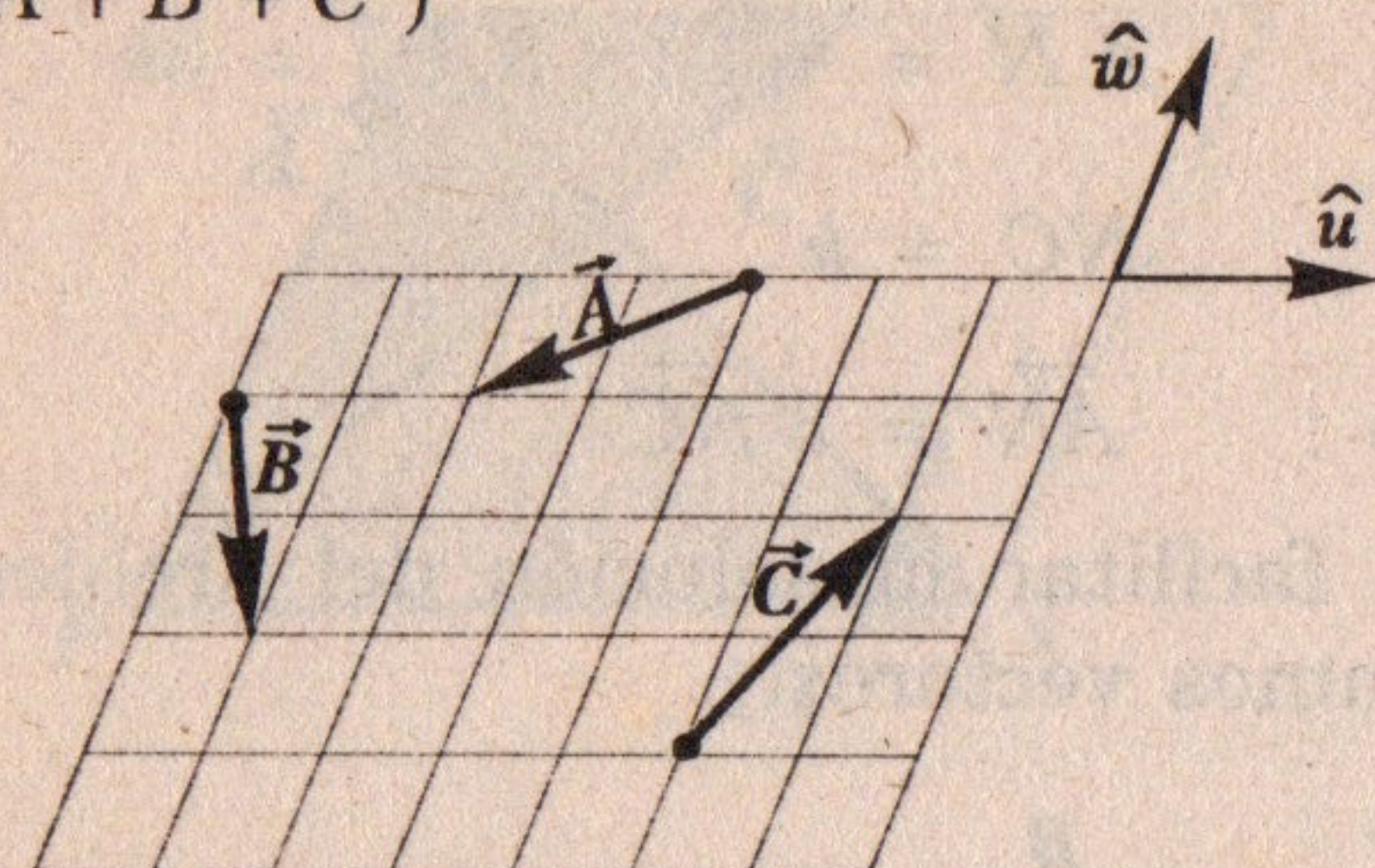
Resolviendo :

$$\boxed{\vec{x}=\frac{\vec{a}-3\vec{b}}{4}}$$

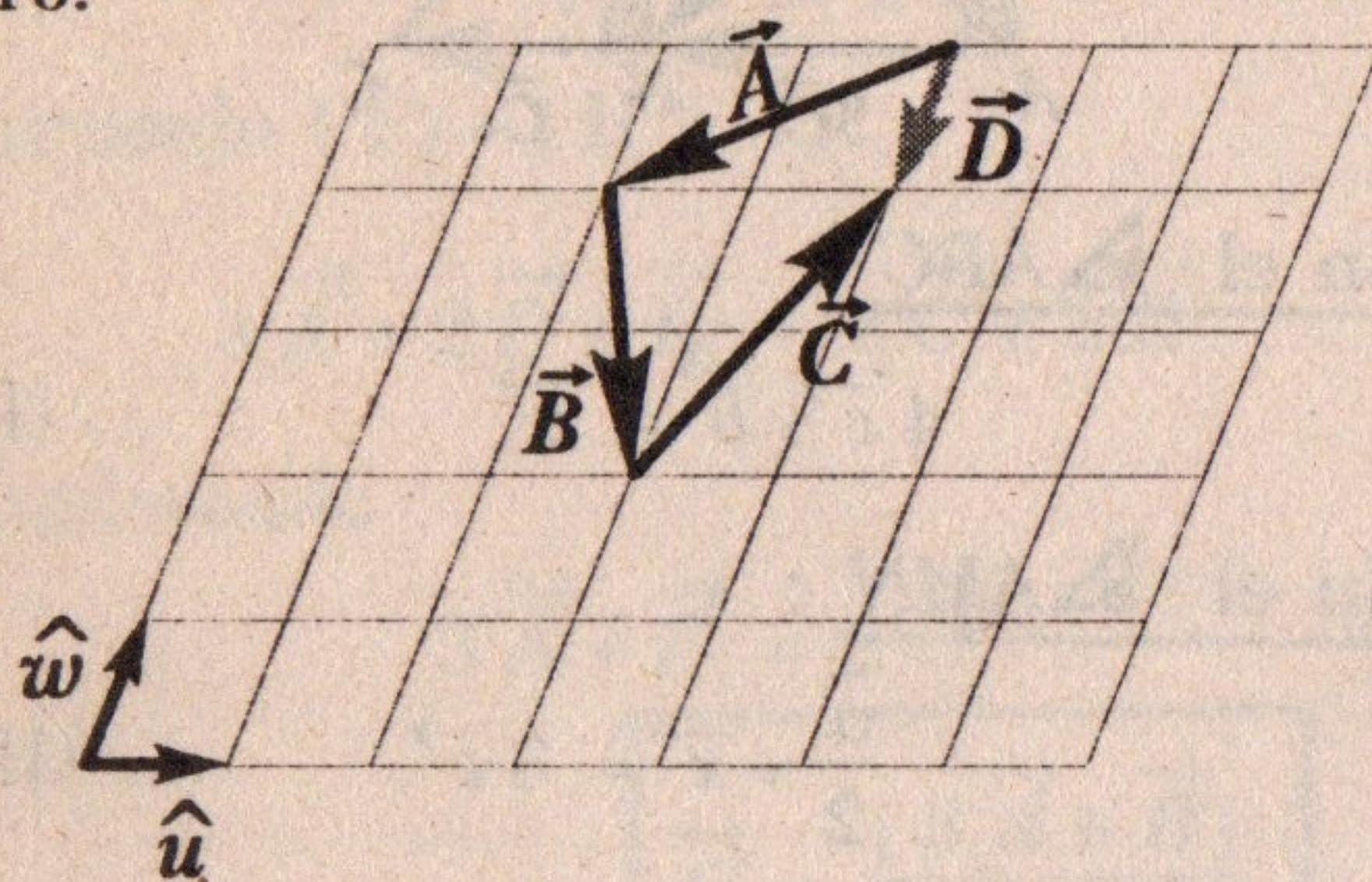
Clave: E

PROBLEMA 138

Se tienen tres vectores A, B y C en el sistema coordenado definido por los vectores unitarios : $\hat{\mu}$, $\hat{w}$ que se mues-

tran en la figura. Hallar el módulo de $2(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN

Para hallar la resultante pedida ubicamos los vectores uno a continuación del otro.

Podemos notar :

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=\vec{D}$$

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=-\vec{w}$$

Nos piden :

$$|\vec{R}|=2|\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}|$$

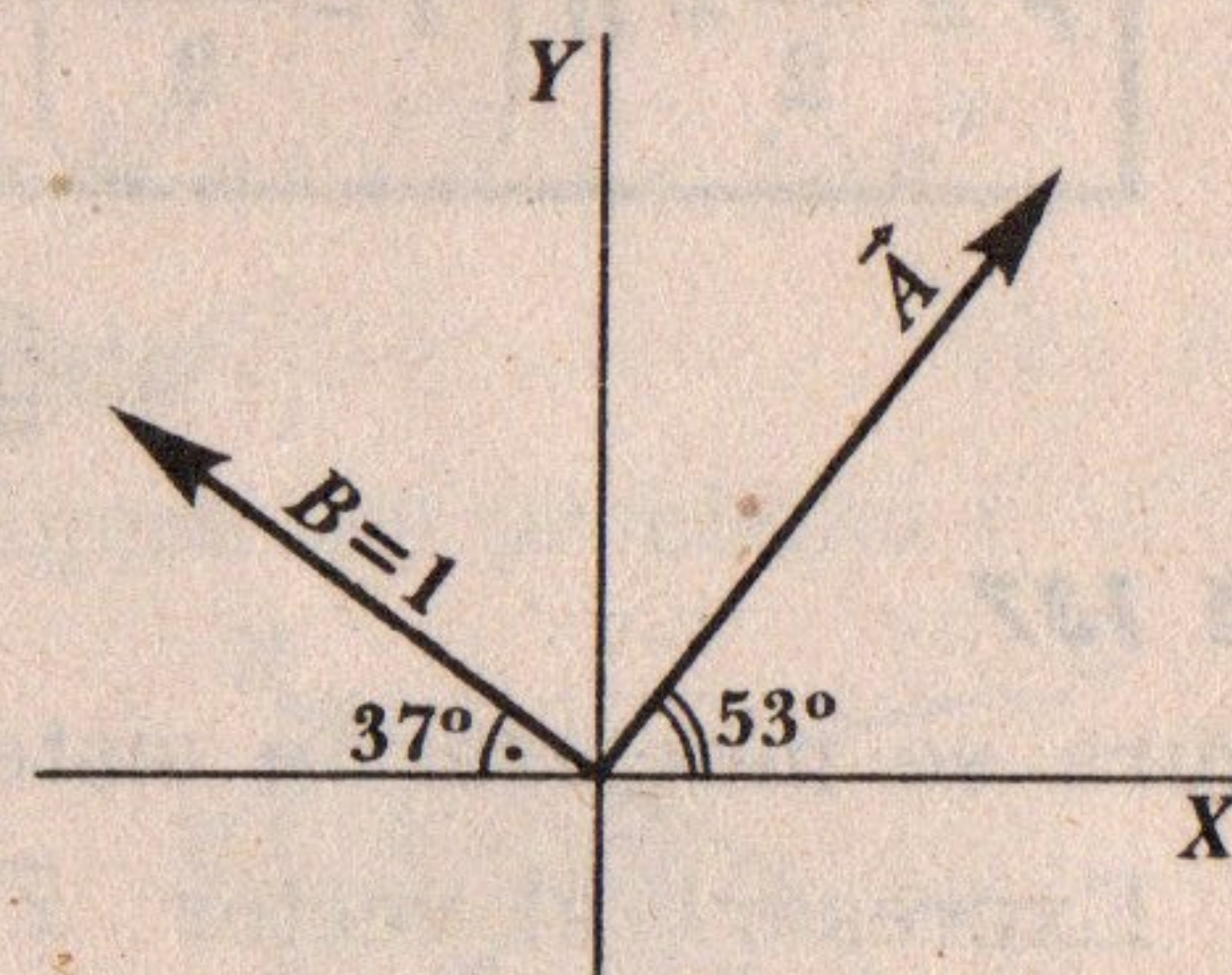
$$|\vec{R}|=2|-\vec{w}|$$

$$|\vec{R}|=2\times 1$$

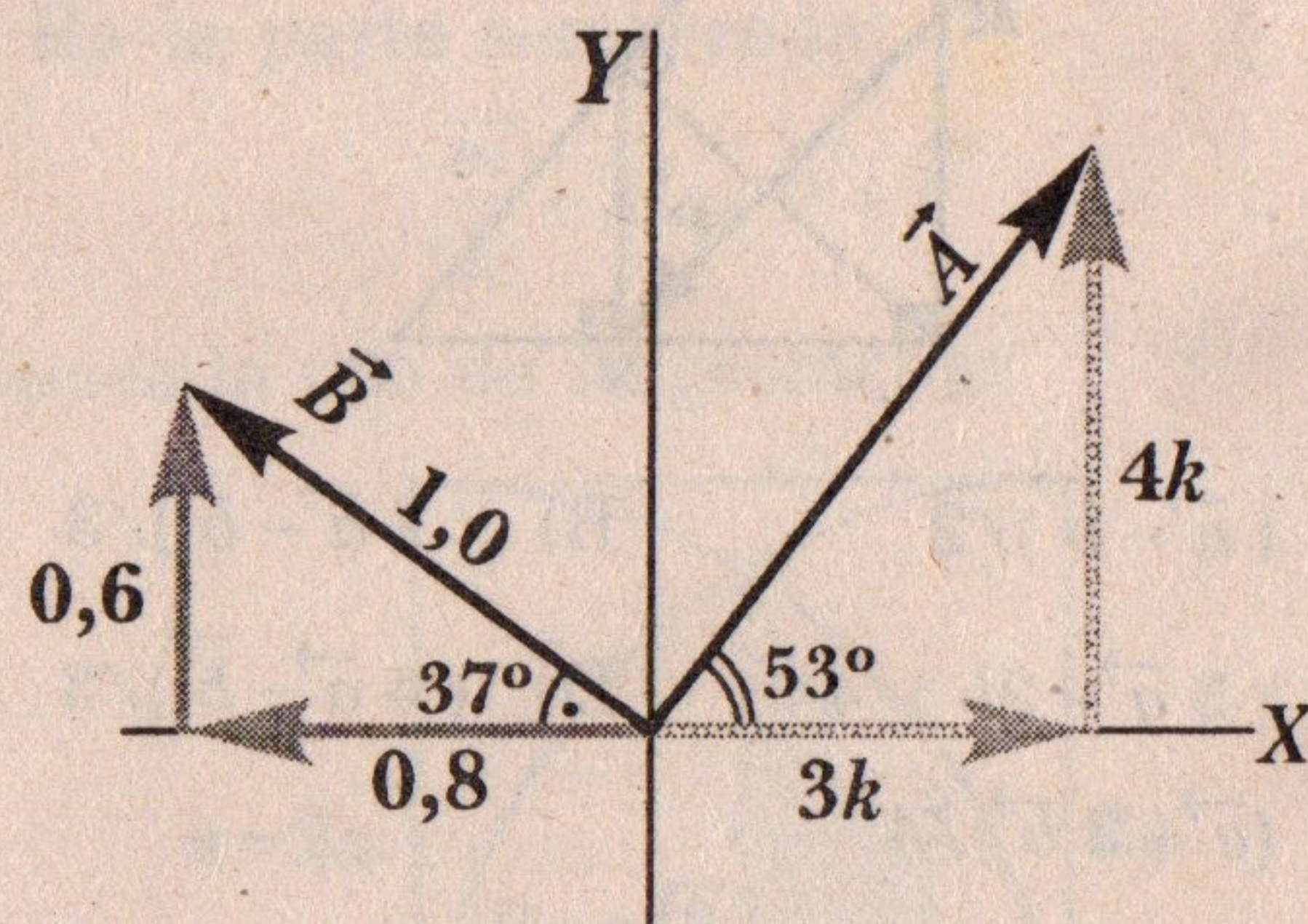
$$\therefore \boxed{|\vec{R}|=2}$$

Clave: B

PROBLEMA 139 (Sem. CEPRE-UNI 2001-I)

En la figura la suma de las componentes "x" de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ vale 1. ¿Cuál es el valor de la tangente del ángulo que forma la resultante de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con el eje X?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN

Conociendo la teoría elemental de los triángulos notables, descomponemos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

$$\vec{A}=(3k\ ,4k)$$

$$\vec{B}=(-0{,}8\ ;0{,}6)$$

Dato: La suma de componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en el eje X es 1.

$$3k-0{,}8=1$$

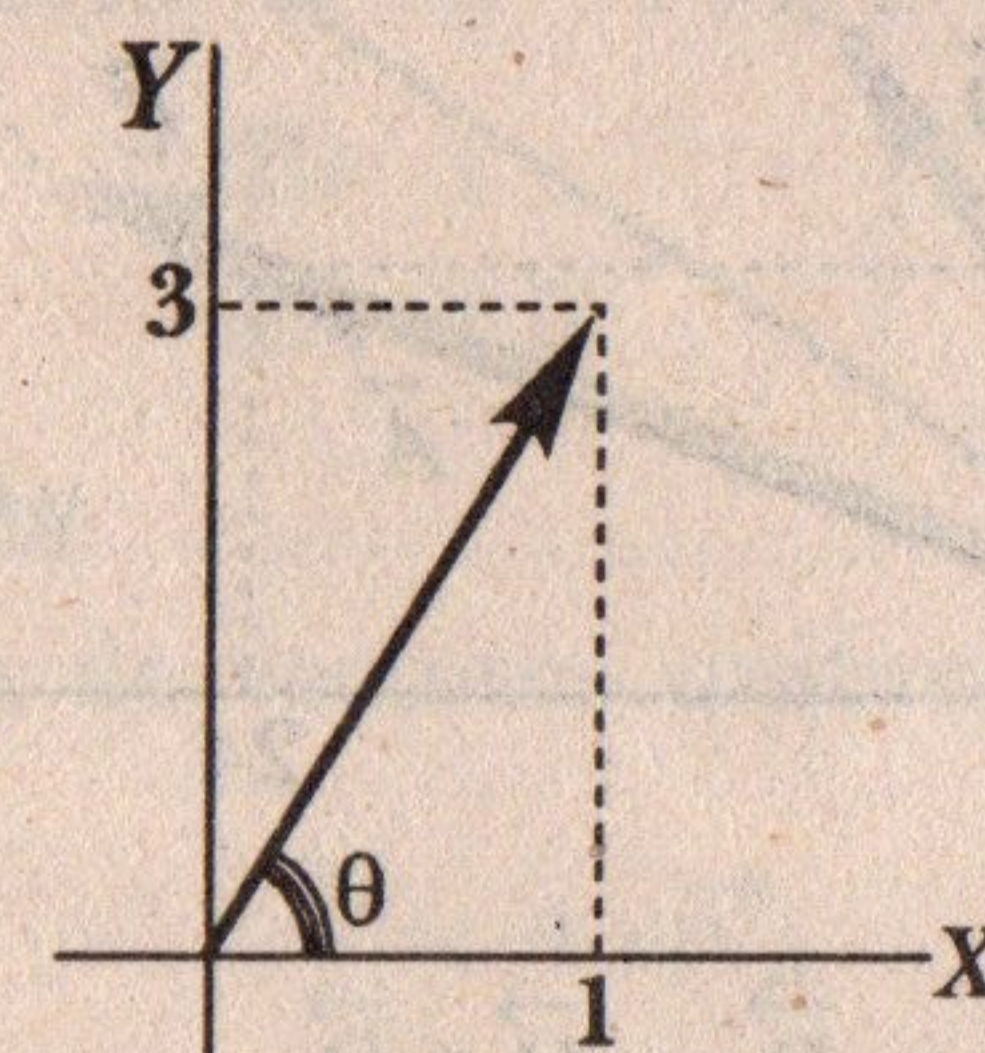
$$\therefore\ k=0{,}6$$

Luego; los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ serán :

$$\vec{A}=(1{,}8\ ;2{,}4)$$

$$\vec{B}=(-0{,}8\ ,0{,}6)$$

La resultante será : $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}$

$$\vec{R}=(1\ ,3)$$

$$\therefore\ \boxed{tg\theta=\frac{3}{1}=3}$$

Clave: C

PROBLEMA 140 (Sem. CEPRE-UNI 2001-I)

La resultante de 3 fuerzas es de 800N en la dirección 37° al Oeste del Norte. Dos de las fuerzas son : 500 N, 53° al Norte del Este y 200 N, 30° al Oeste del Sur. Hallar :

I) Las componentes rectangulares de la tercera fuerza.

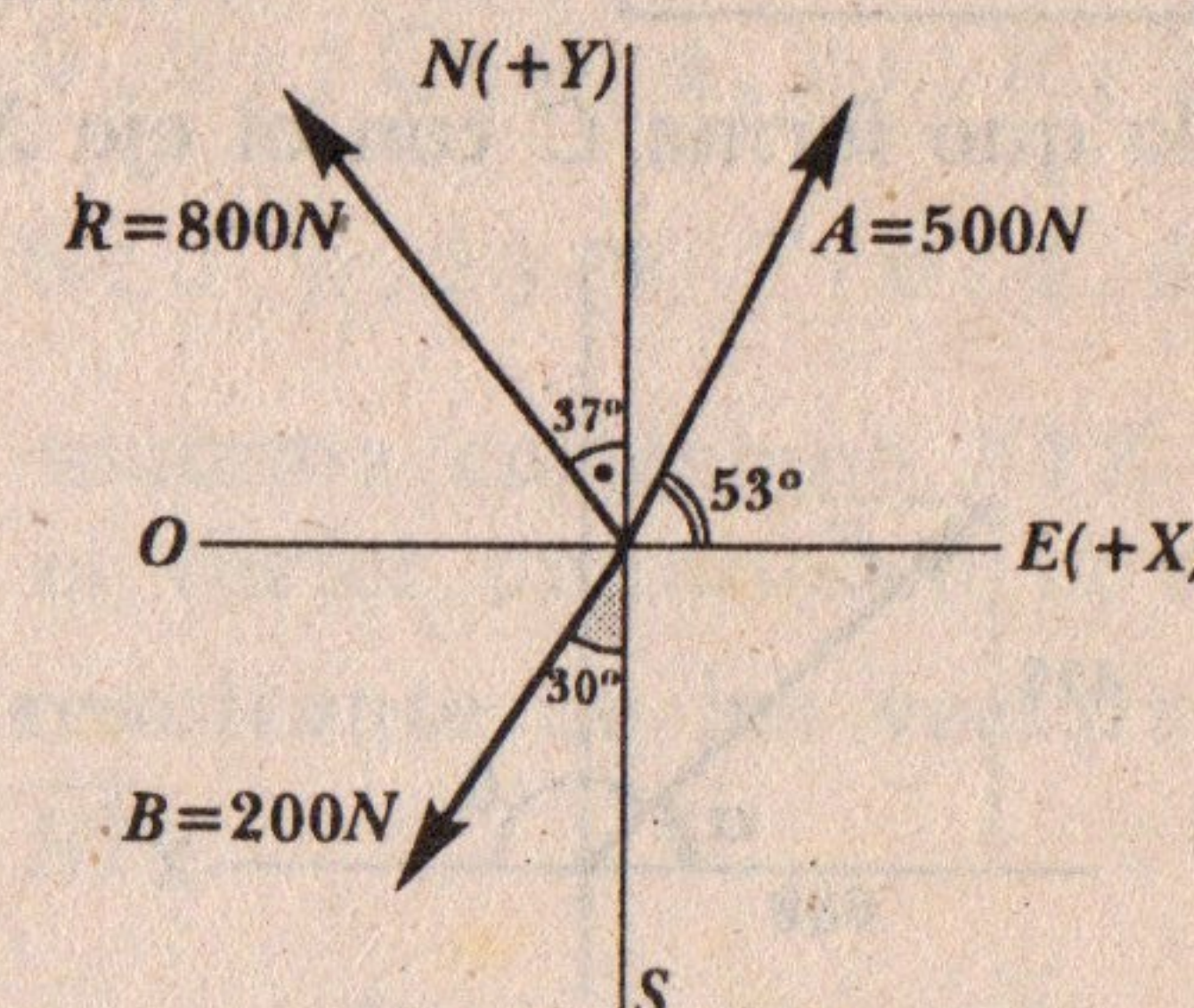
II) La magnitud de esta fuerza.

III) El ángulo entre la tercera fuerza y el eje "X".

Asuma : Ejes $+X$ e $+Y$ como Este y Norte respectivamente.

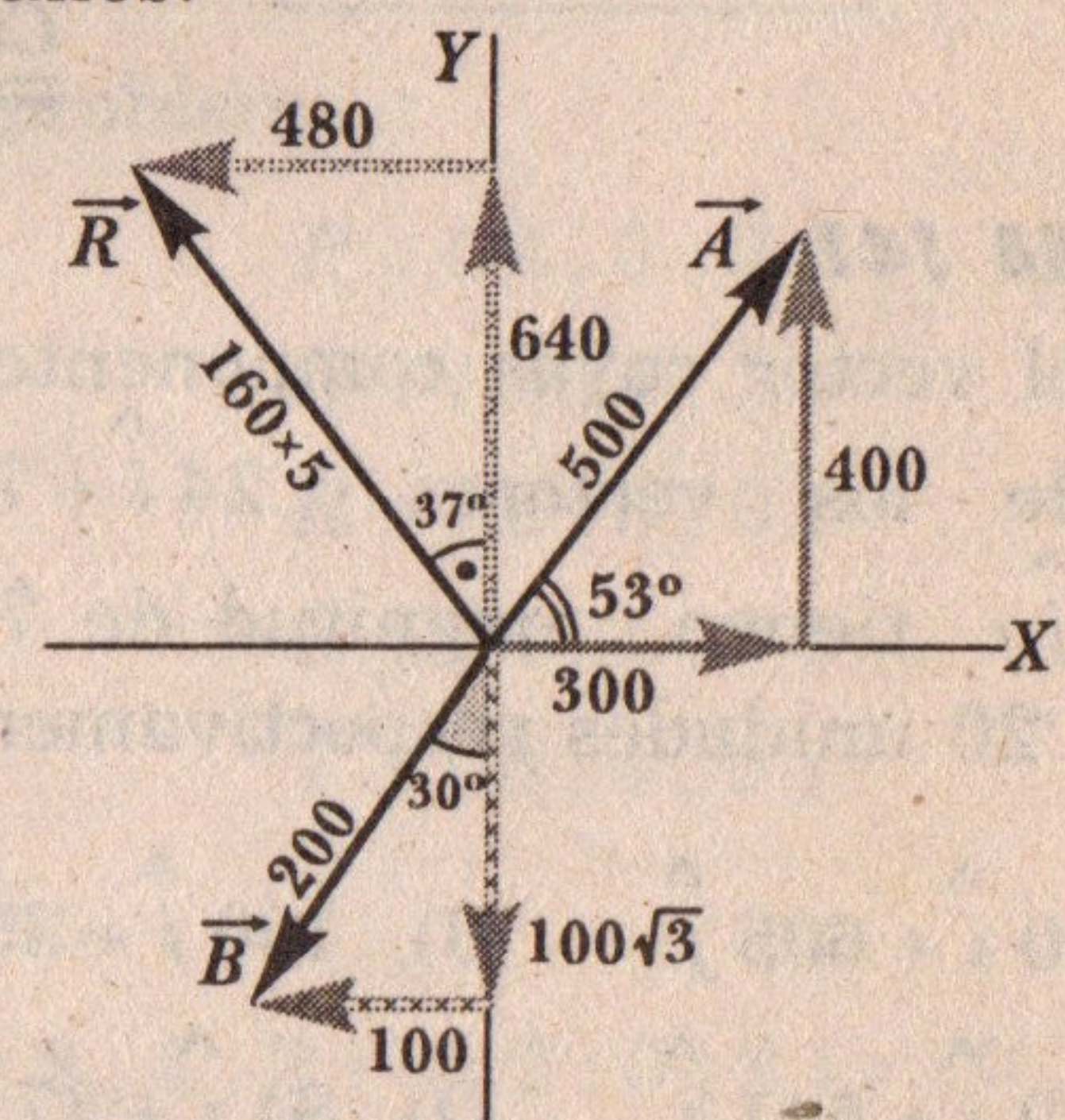
A) $(-680\,\hat{i}+413\,\hat{j})N$; 796 N ; 148,7°
B) $(-880\,\hat{i}+413\,\hat{j})N$; 972,1 N ; 154,8°
C) $(-880\,\hat{i}+67\,\hat{j})N$; 882,5N ; 175,6°
D) $(-68\,\hat{i}+413\,\hat{j})N$; 418,56 N ; 148,7°
E) $(680\,\hat{i}+413\,\hat{j})N$; 796 N ; 31,27°

RESOLUCIÓN

Ubicamos las fuerzas datos en un plano cartesiano.

Sea : $\vec{R}$: resultante

$$\boxed{\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}} \quad \ldots(\alpha)$$

$\vec{C}$: Fuerza desconocida

Descomponiendo los vectores en los ejes cartesianos.

Luego :

$$\vec{R}=(-480\ ,640)N$$

$$\vec{A}=(300\ ,400)N$$

$$\vec{B}=(-100\ ,-100\sqrt{3})$$

En (α) :

$$(-480\ ,640)=(300\ ,400)+(-100\ ,-100\sqrt{3})+\vec{C}$$

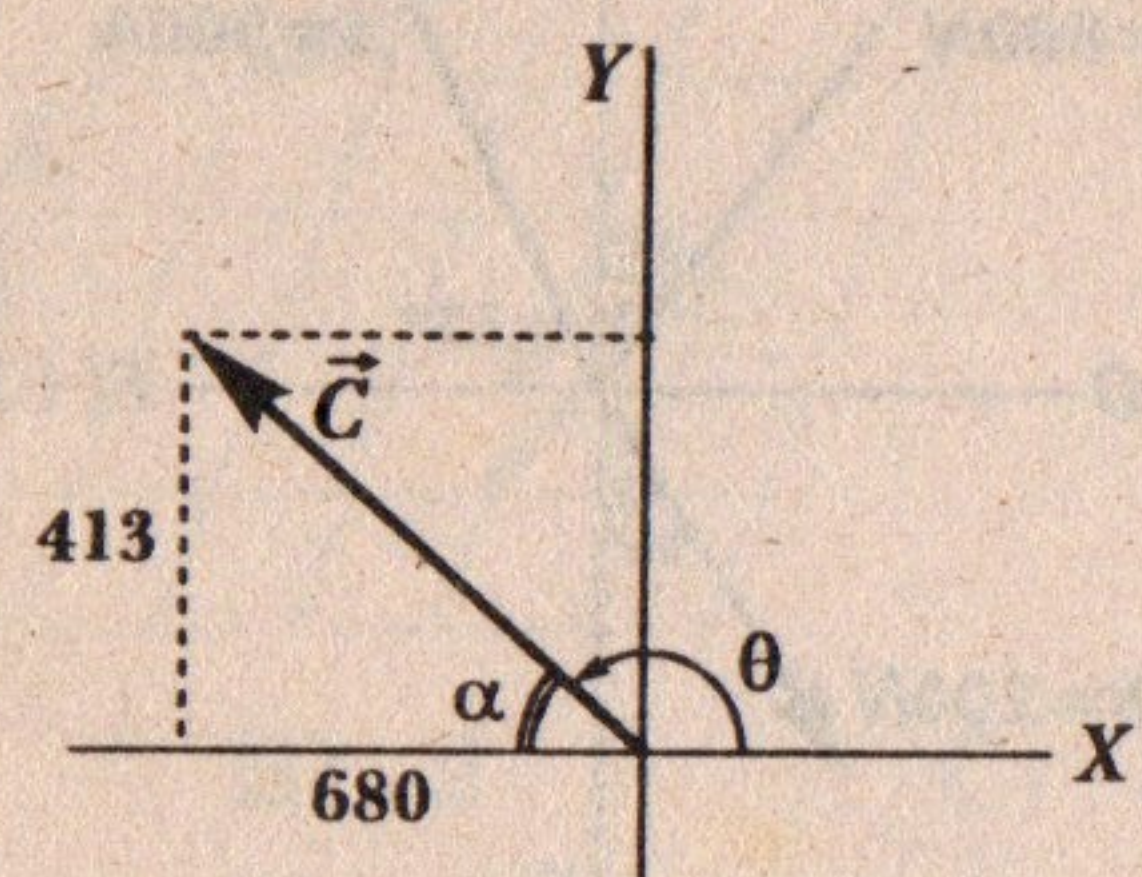
Resolviendo y haciendo $\sqrt{3}\approx 1{,}73$

$$\vec{C}=(-680\ ,413)N$$

$$\therefore\ \boxed{\vec{C}=(-680\,\hat{i}+413\,\hat{j})N} \quad Rpta.\ (I)$$

$$C = \sqrt{(-680)^2 + 413^2}$$

$\therefore$ $\boxed{C \approx 796\,N}$ Rpta. (II)

El ángulo que forma $\vec{C}$ con el eje X es :

$$tg\,\alpha = \frac{413}{680} = 0{,}6073$$

$$\alpha \approx 31{,}3°$$

$$\Rightarrow \theta = 180 - \alpha$$

$\therefore$ $\boxed{\theta = 148{,}7°}$ *Rpta. (III)*

Clave: A

PROBLEMA 141

Hallar el vector cuyas componentes a lo largo de los vectores $(24\hat{i} + 7\hat{j})$ y $(3\hat{i} + 4\hat{j})$ tienen magnitud de 75 unidades y 20 unidades respectivamente.

A) $1\,860\,\hat{i} + 605\,\hat{j}$ B) $190\,\hat{i} + 357\,\hat{j}$

C) $1\,812\,\hat{i} + 541\,\hat{j}$ D) $84\,\hat{i} + 37\,\hat{j}$

E) $22\,\hat{i} + 33\,\hat{j}$

RESOLUCIÓN

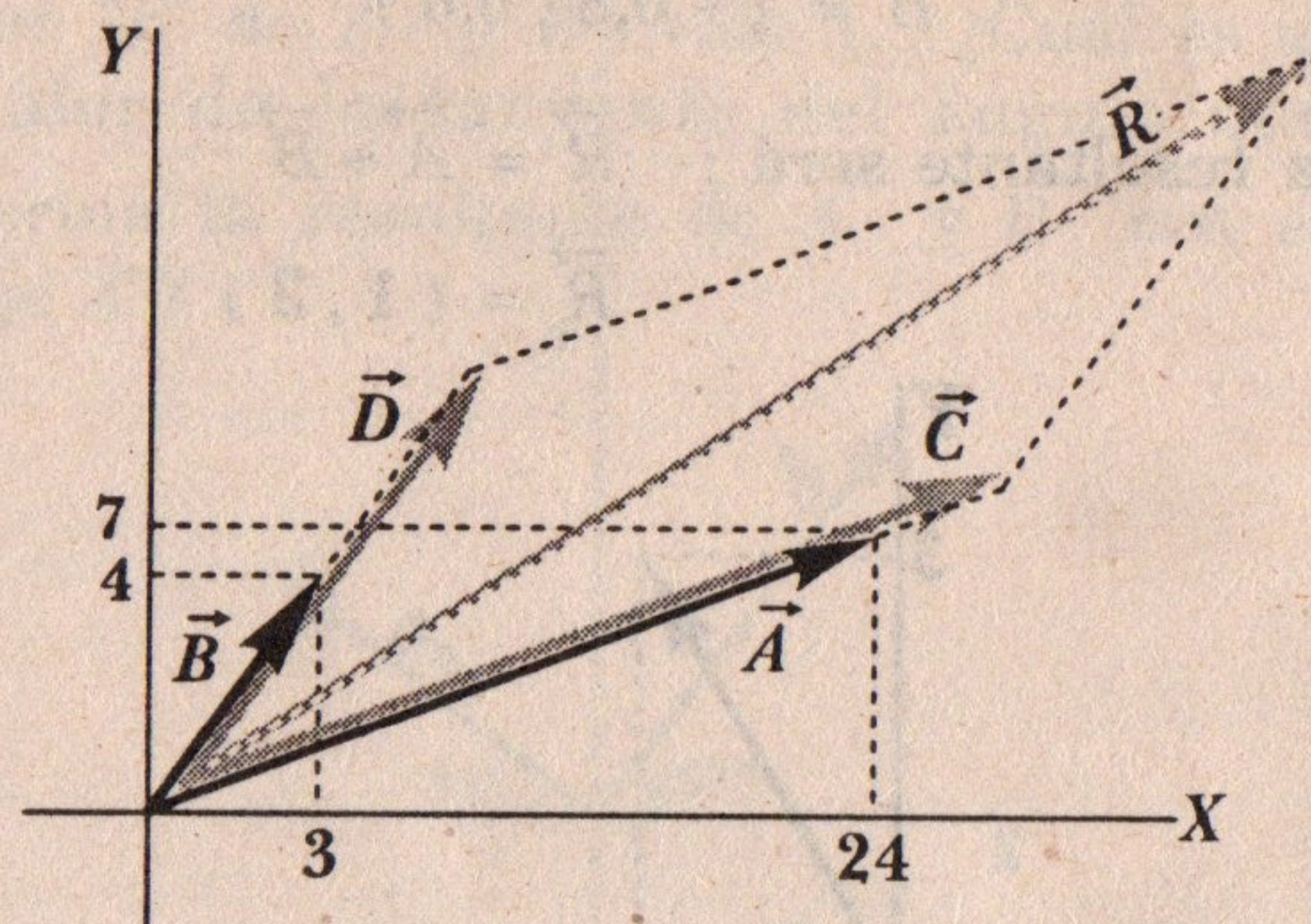
Llamemos :

$$\vec{A} = (24\,,7)$$

$$\Rightarrow |\vec{A}| = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$$

$$\vec{B} = (3\,,4)$$

$$\Rightarrow |\vec{B}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Si descomponemos el vector en las direcciones de $\vec{A}$ y $\vec{B}$; será :

$$\vec{R} = \vec{C} + \vec{D}$$

Pero :

$$\vec{C} // \vec{A} \Rightarrow \vec{C} = K_1\vec{A}$$

$$\vec{D} // \vec{B} \Rightarrow \vec{D} = K_2\vec{B}$$

$$\boxed{\vec{R} = K_1\vec{A} + K_2\vec{B}} \quad \ldots (I)$$

Por dato, las componentes son :

$$K_1\,|\vec{A}| = 75$$

$$K_1 \times 25 = 75$$

$$\therefore K_1 = 3$$

$$K_2\,|\vec{B}| = 20$$

$$K_2 \times 5 = 20$$

$$\therefore K_2 = 4$$

Reemplazando en (I)

$$\vec{R} = 3(24\,,7) + 4(3\,,4)$$

$\therefore$ $\boxed{\vec{R} = (84\,,37)}$

Clave: D

PROBLEMA 142

Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos a los vectores unitarios $\vec{\mu}_A = (\hat{i} + \hat{j})/\sqrt{2}$ y $\vec{\mu}_B = (\hat{i} - \hat{j})/\sqrt{2}$. Halle la magnitud del vector $\vec{A}$ si $\vec{A} + 2\vec{B} = \sqrt{2}\,\hat{i}$.

A) 0,5 B) 1 C) 1,5

D) 2 E) 2,5

RESOLUCIÓN

Por teoría de vectores unitarios :

$$\vec{A} = A \cdot \vec{\mu}_A$$

Luego, de los datos :

$$\vec{A} = A \cdot \frac{(1\,,1)}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{B} = B \cdot \frac{(1\,,-1)}{\sqrt{2}}$$

Además :

$$\vec{A} + 2\vec{B} = \sqrt{2}\,\hat{i}$$

$$\left(\frac{A}{\sqrt{2}}, \frac{A}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{2B}{\sqrt{2}}, \frac{-2B}{\sqrt{2}}\right) = (\sqrt{2}\,,0)$$

$$\left(\frac{A}{\sqrt{2}} + \frac{2B}{\sqrt{2}}\,,\ \frac{A}{\sqrt{2}} - \frac{2B}{\sqrt{2}}\right) = (\sqrt{2}\,,0)$$

Igualando :

$$* \quad \frac{A}{\sqrt{2}} - \frac{2B}{\sqrt{2}} = 0 \rightarrow A = 2B \quad \ldots (I)$$

$$* \quad \frac{A}{\sqrt{2}} + \frac{2B}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{A}{\sqrt{2}} + \frac{A}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \rightarrow \boxed{A = 2}$$

Clave: D

PROBLEMA 143

Sean los puntos :

$$P(2\,,0\,,2)\ ;\ Q(2\,,4\,,2)\ ;\ R(2\,,0\,,0)$$

$$S(0\,,4\,,2)\ \text{y}\ T(0\,,4\,,0)$$

en un sistema cartesiano XYZ. Determinar el vector unitario en la dirección de la resultante de los vectores $\vec{PQ}$, $\vec{RQ}$ y $\vec{ST}$.

A) $+\hat{j}$ B) $-\hat{k}$ C) $+\hat{i}$

D) $-(1/\sqrt{2})(\hat{j} + \hat{k})$ E) $+(1/\sqrt{2})(\hat{i} + \hat{j})$

RESOLUCIÓN

Por teoría

$$\boxed{\vec{MN} = N - M}$$

En el problema :

$$P : (2\,,0\,,2)$$
$$Q : (2\,,4\,,2)$$
$$R : (2\,,0\,,0)$$
$$S : (0\,,4\,,2)$$
$$T : (0\,,4\,,0)$$

Luego :

$$\vec{PQ} = (2\,,4\,,2) - (2\,,0\,,2) = (0\,,4\,,0)$$

$$\vec{RQ} = (2\,,4\,,2) - (2\,,0\,,0) = (0\,,4\,,2)$$

$$\vec{ST} = (0\,,4\,,0) - (0\,,4\,,2) = (0\,,0\,,-2)$$

La resultante de los vectores es :

$$\vec{R} = \vec{PQ} + \vec{RQ} + \vec{ST}$$

$$\vec{R} = (0\,,8\,,0) \Rightarrow \boxed{\vec{R} = 8\hat{j}}$$

Por teoría :

La dirección de la resultante es : $+\hat{j}$

Clave: A

PROBLEMA 144

Respecto de los vectores unitarios de 2 vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se puede decir que la proposición verdadera es :

A) Si $\vec{A} = 2\vec{B}$, entonces: $\vec{\mu}_A = 2\vec{\mu}_B$

B) Si entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ hay cierto ángulo, la resultante de sus vectores unitarios puede tener módulo igual a la unidad.

C) Si $\vec{A}$ es ortogonal a $\vec{B}$, el producto escalar de sus vectores unitarios es la unidad.

D) Si entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ hay un ángulo variable $(0 \le \theta \le 180°)$.

Entonces : $0 < |\vec{\mu}_A + \vec{\mu}_B| \le 2$

E) Hay 2 proposiciones verdaderas.

RESOLUCIÓN

Proposición (A) (F)

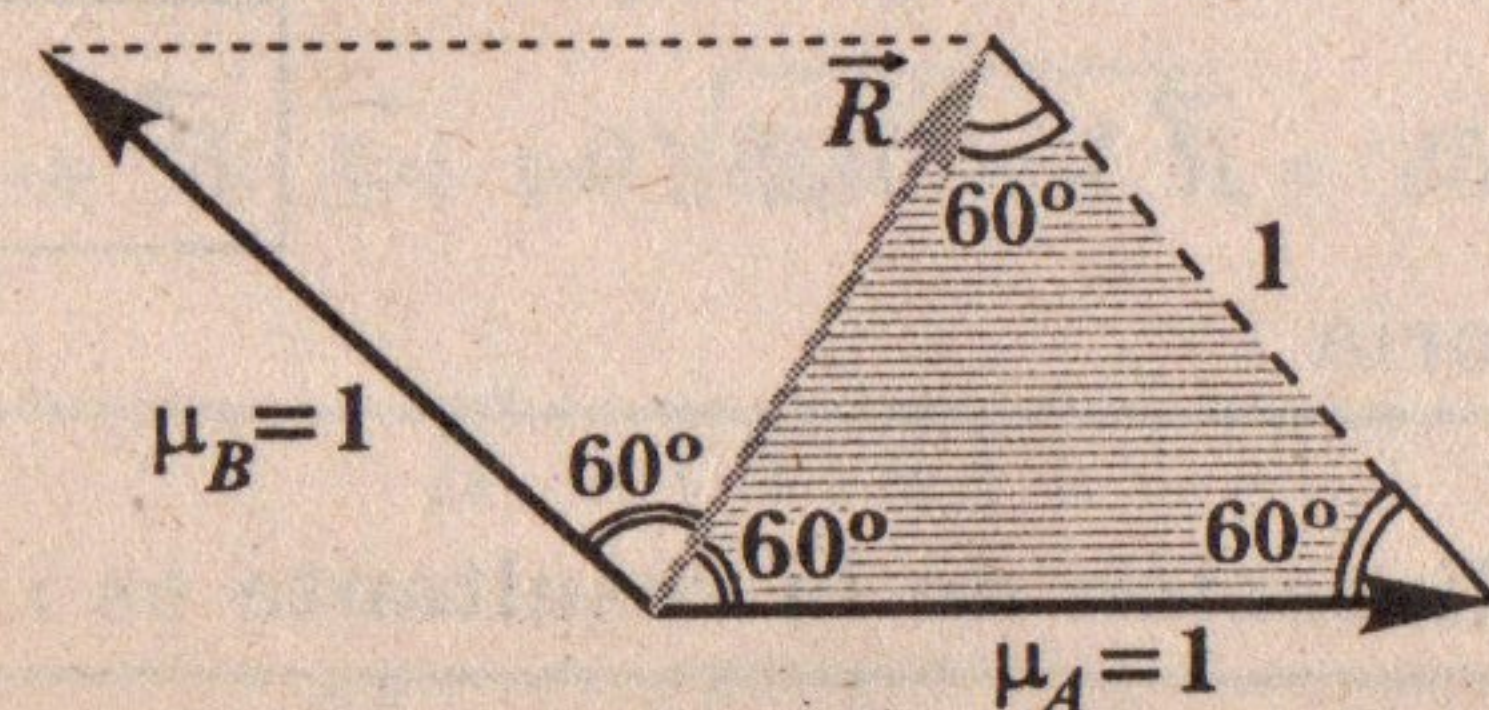
Si $\vec{A} = 2\vec{B}$ entonces $|\vec{A}| = 2|\vec{B}|$

Luego : $\dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \dfrac{2\vec{B}}{2|\vec{B}|}$

$\therefore$ $\boxed{\vec{\mu}_A = \vec{\mu}_B}$

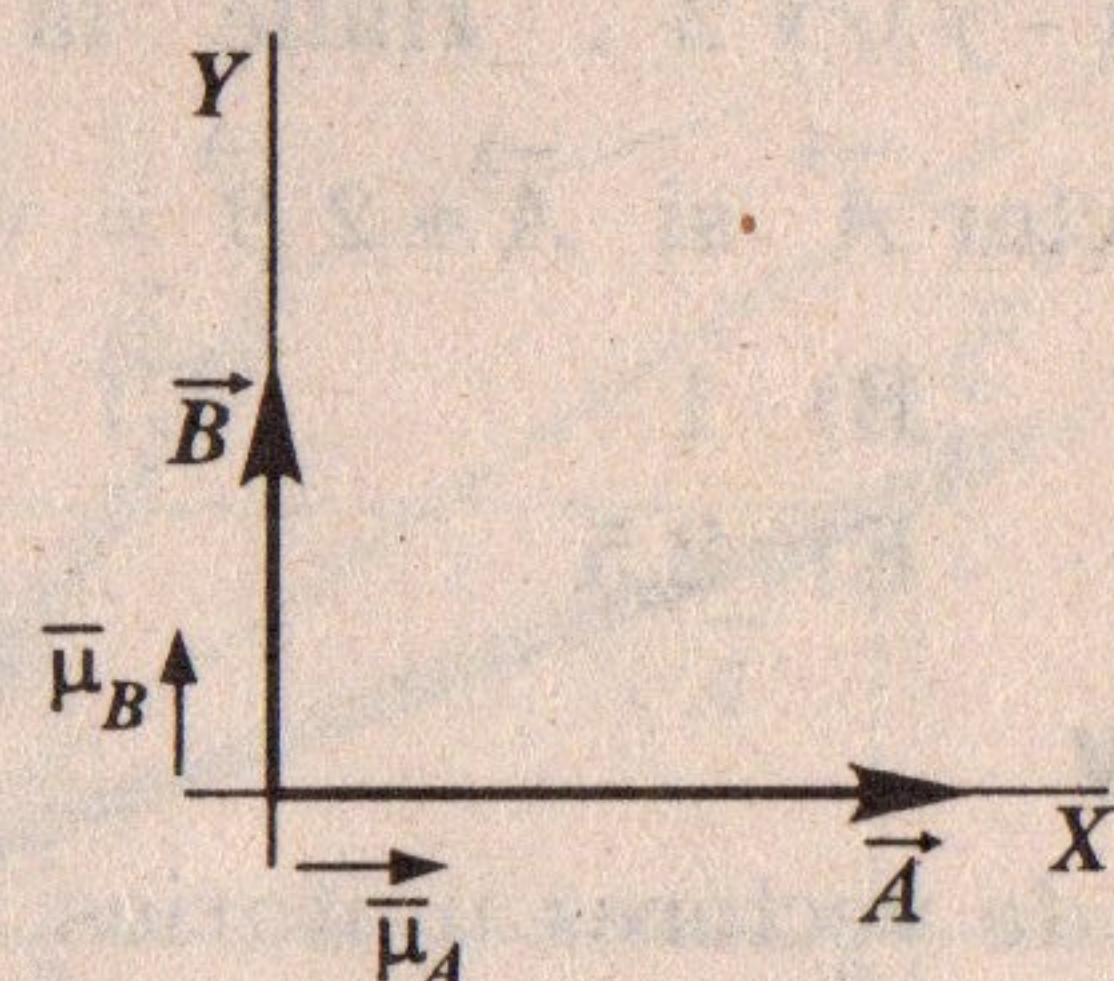
Proposición (B) (V)

Por teoría sabemos que el módulo de cualquier vector unitario es la unidad.

Si entre los vectores unitarios hay un ángulo de 120°, entonces el módulo de su resultante es la unidad.

En el triángulo sombreado : $\boxed{R = 1}$

Proposición (C) (F)

Si $\vec{A}$ es ortogonal a $\vec{B}$, entonces hacen entre ellos 90°

Supongamos :

$$\vec{A} = 3\hat{i} = (3,0)$$

$$\vec{B} = 2\hat{j} = (0,2)$$

$$\vec{\mu}_A = (1,0) = \hat{i}$$

$$\vec{\mu}_B = (0,1) = \hat{j}$$

Su producto escalar se calcula por :

$$\vec{\mu}_A \cdot \vec{\mu}_B = (1,0)\cdot(0,1)$$

$$\vec{\mu}_A \cdot \vec{\mu}_B = 1\times 0 + 0\times 1$$

$$\vec{\mu}_A \cdot \vec{\mu}_B = 0 + 0$$

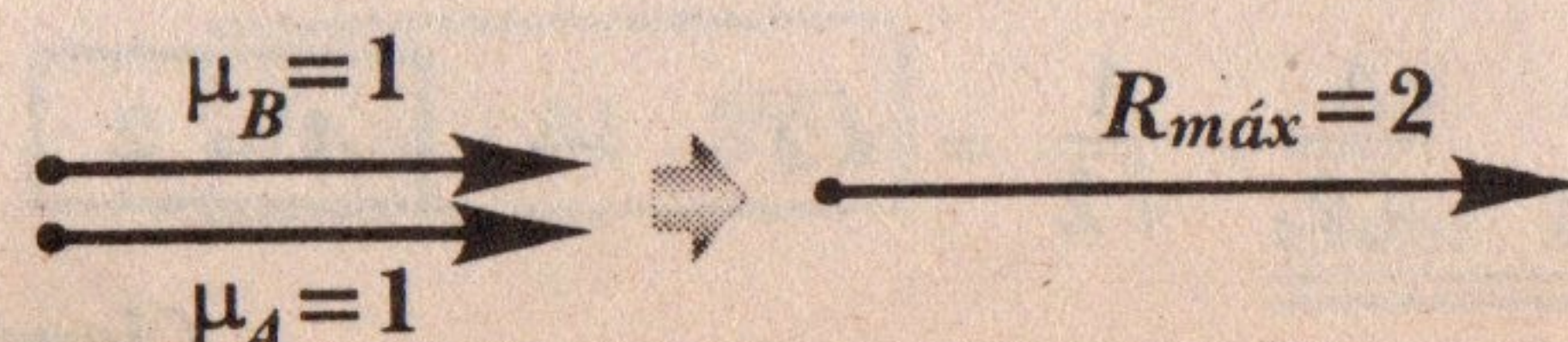
Luego :

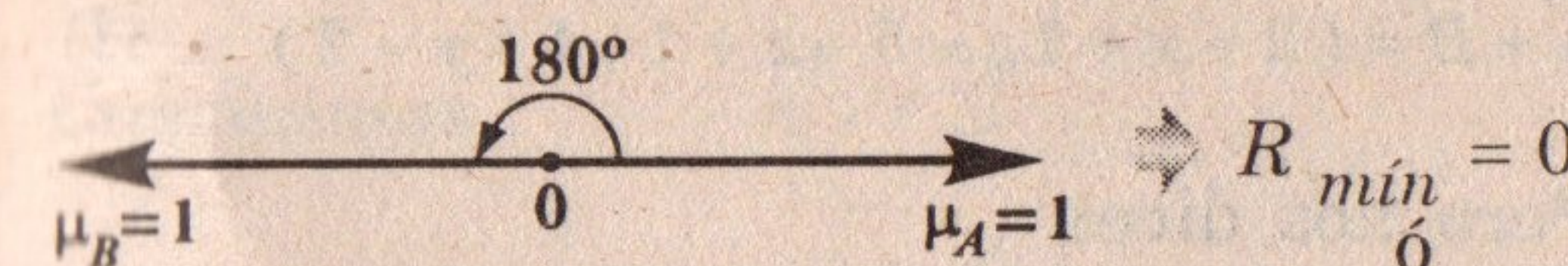
$$\boxed{\text{Si : } \vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{\mu}_A \cdot \vec{\mu}_B = 0}$$

Proposición (D) (F)

Sabiendo que los vectores unitarios tienen valor la unidad, y si el ángulo entre ellos es variable, diremos :

* Si $\theta = 0°$ la resultante es máxima.

$\mu_B = 1$, $\mu_A = 1$ ⇒ $R_{máx} = 2$

** Si $\theta = 180°$ la resultante es mínima.

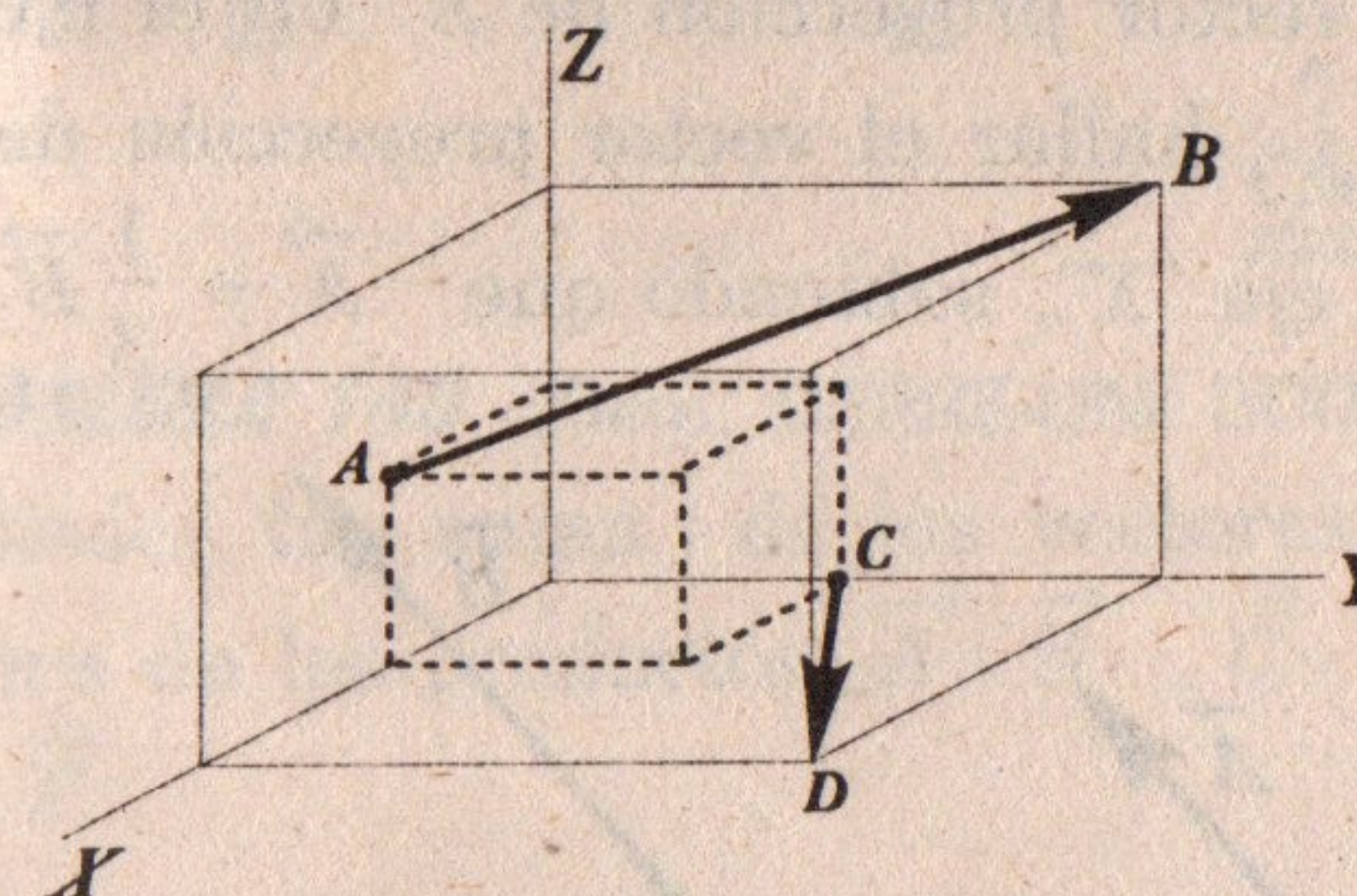
$\mu_B = 1$, $\mu_A = 1$ ⇒ $R_{mín} = 0$

Concluímos :

$$0 \le |\vec{\mu}_A + \vec{\mu}_B| \le 2$$

Proposición (E) (F)

Clave B

PROBLEMA 145 **(Sem. CEPRE-UNI 2001-I)**

En la figura se muestra 2 cubos. Si el volumen del cubo mayor es 8 veces el del cubo menor , determine el vector $\vec{G} = 2\sqrt{6}\,\vec{\mu}_1 + \sqrt{5}\,\vec{\mu}_2$, donde $\vec{\mu}_1$ es el vector unitario a lo largo de $\vec{AB}$ y $\vec{\mu}_2$ es el vector unitario a lo largo de $\vec{CD}$.

A) $5\hat{j} + 2\hat{k}$ B) $3\hat{i} + \hat{j}$

C) $5\hat{k} + 2\hat{j}$ D) $2\hat{i} + 3\hat{k}$

E) $3\hat{k} + 2\hat{i}$

RESOLUCIÓN

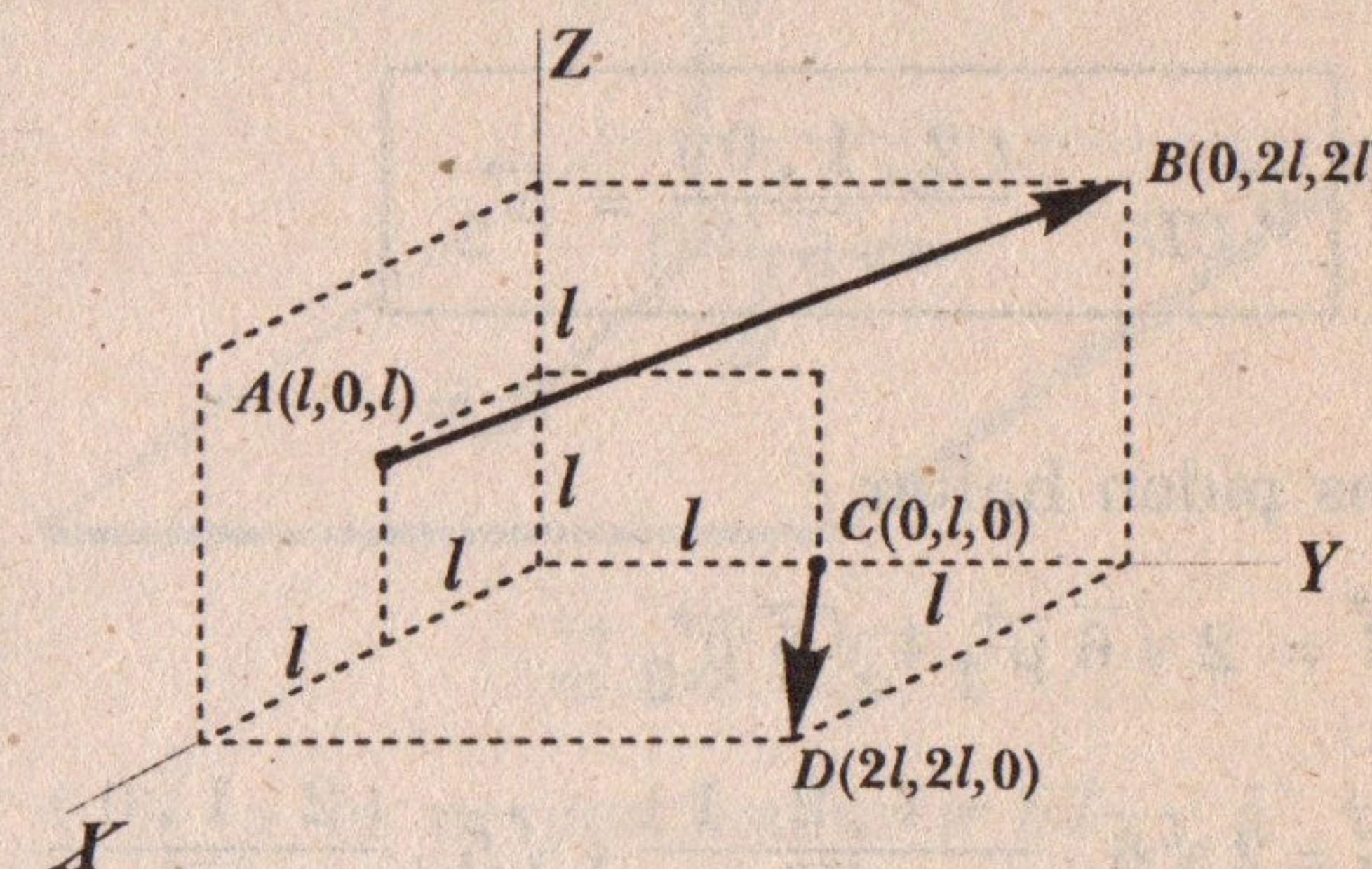
Dato :

Vol. cubo mayor = 8 vol. cubo menor

$$L^3 = 8\times l^3$$

$$\Rightarrow \boxed{L = 2l}$$

Evaluando las coordenadas de los puntos A , B , C y D .

$A(l,0,l)$, $B(0,2l,2l)$, $C(0,l,0)$, $D(2l,2l,0)$

Luego :

I. $\vec{AB} = B - A$

$$\vec{AB} = (0, 2l, 2l) - (l, 0, l)$$

$$\vec{AB} = (-l, 2l, l)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-l)^2 + (2l)^2 + l^2}$$

$$|\vec{AB}| = l\sqrt{6}$$

$$\vec{\mu}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{(-l, 2l, l)}{l\sqrt{6}}$$

$$\boxed{\vec{\mu}_{AB} = \frac{(-1, 2, 1)}{\sqrt{6}} = \vec{\mu}_1}$$

II. $\vec{CD} = D - C$

$$\vec{CD} = (2l, 2l, 0) - (0, l, 0)$$

$$\vec{CD} = (2l, l, 0)$$

$$|\vec{CD}| = \sqrt{(2l)^2 + l^2 + 0^2}$$

$$|\vec{CD}| = l\sqrt{5}$$

$$\vec{\mu}_{CD} = \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|} = \frac{(2l, l, 0)}{l\sqrt{5}}$$

$$\boxed{\vec{\mu}_{CD} = \frac{(2, 1, 0)}{\sqrt{5}} = \vec{\mu}_2}$$

Nos piden hallar :

$$\vec{G} = 2\sqrt{6}\,\vec{\mu}_1 + \sqrt{5}\,\vec{\mu}_2$$

$$\vec{G} = 2\sqrt{6}\cdot\frac{(-1, 2, 1)}{\sqrt{6}} + \sqrt{5}\cdot\frac{(2, 1, 0)}{\sqrt{5}}$$

Desarrollando :

$$G = (0, 5, 2)$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{G} = 5\hat{j} + 2\hat{k}}$$

Clave: A

PROBLEMA 146 (Sem. CEPRE-UNI 2001-I)

Si :

$$\vec{A} = (2\hat{i} - 5\hat{j} + 4\hat{k}) \quad \text{y}$$

$$\vec{B} = (x+1)\hat{i} - (z-1)\hat{j} + (y-2)\hat{k}$$

hallar x , y , z de tal manera que el vector $\vec{A} + \vec{B}$ tenga componentes paralelas a los ejes $+X$ y $+Y$. De módulos 5 y 6 unidades respectivamente. Dar como respuesta : x, z, y .

A) 2, 10, – 2 B) 2, – 10, – 2

C) – 2, – 10, 2 D) 2, 10, 2

E) – 2, – 10, – 2

RESOLUCIÓN

Según el problema :

$$\vec{A} = (2, -5, 4)$$

$$\vec{B} = (x+1, -z+1, y-2)$$

Luego :

$$\vec{A} + \vec{B} = (2 + x + 1, -5 - z + 1, 4 + y - 2) \quad \dots (I)$$

Pero nos dicen :

$$\vec{A} + \vec{B} = (5, 6, 0) \quad \dots (II)$$

Igualando las componentes de (I) y (II) :

$$2 + x + 1 = 5 \rightarrow x = 2$$

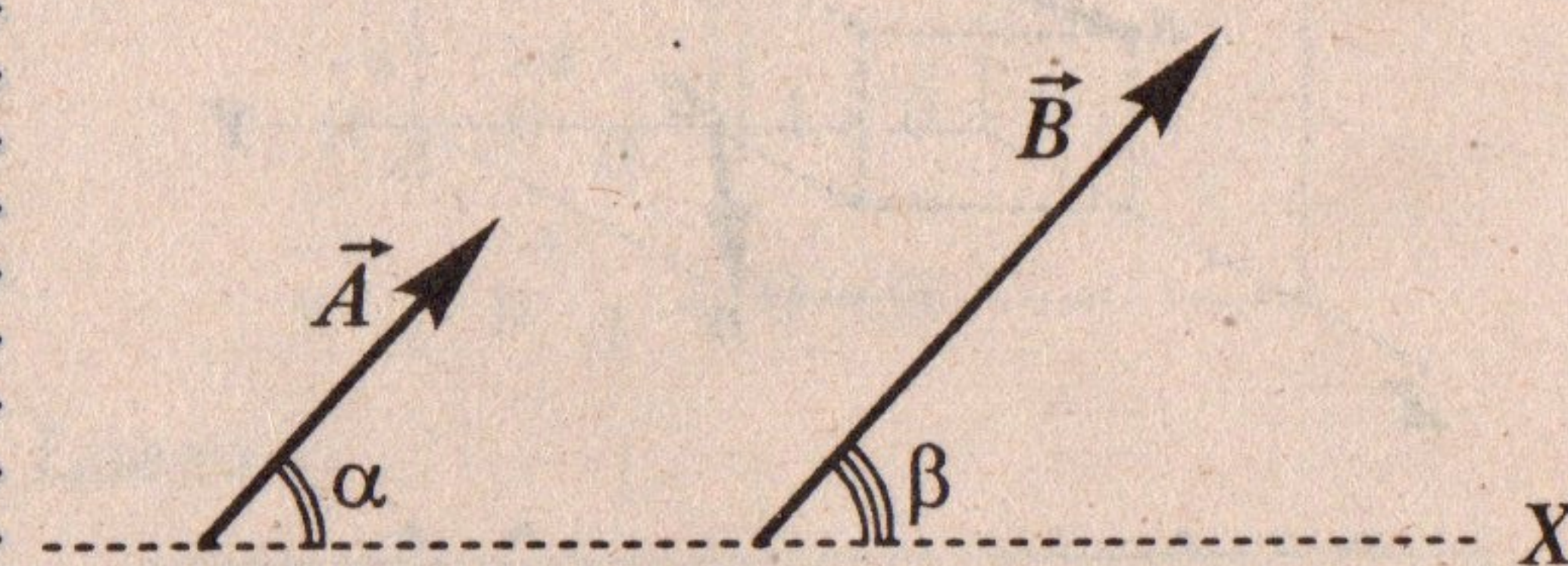
$$-5 - z + 1 = 6 \rightarrow z = -10$$

$$4 + y - 2 = 0 \rightarrow y = -2$$

$$\therefore \quad \boxed{x, z, y = 2, -10, -2}$$

Clave: B

PROBLEMA 147 (Sem. CEPRE-UNI 2001-I)

En la siguiente figura que se muestra, si el vector proyección de $\vec{A}$ en el eje X es $2\hat{i}$, hallar el vector proyección de $\vec{B}$ en el eje "X", sabiendo que $\vec{A} = \frac{1}{3}\vec{B}$.

A) $2\hat{i}$ B) $3\hat{i}$

C) $4\hat{i}$ D) $5\hat{i}$

E) $6\hat{i}$

RESOLUCIÓN

Las proyecciones de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en el eje "X" serían las componentes cartesianas en dicho eje.

Por el dato adicional :

$$\vec{A} = \frac{1}{3}\vec{B}$$

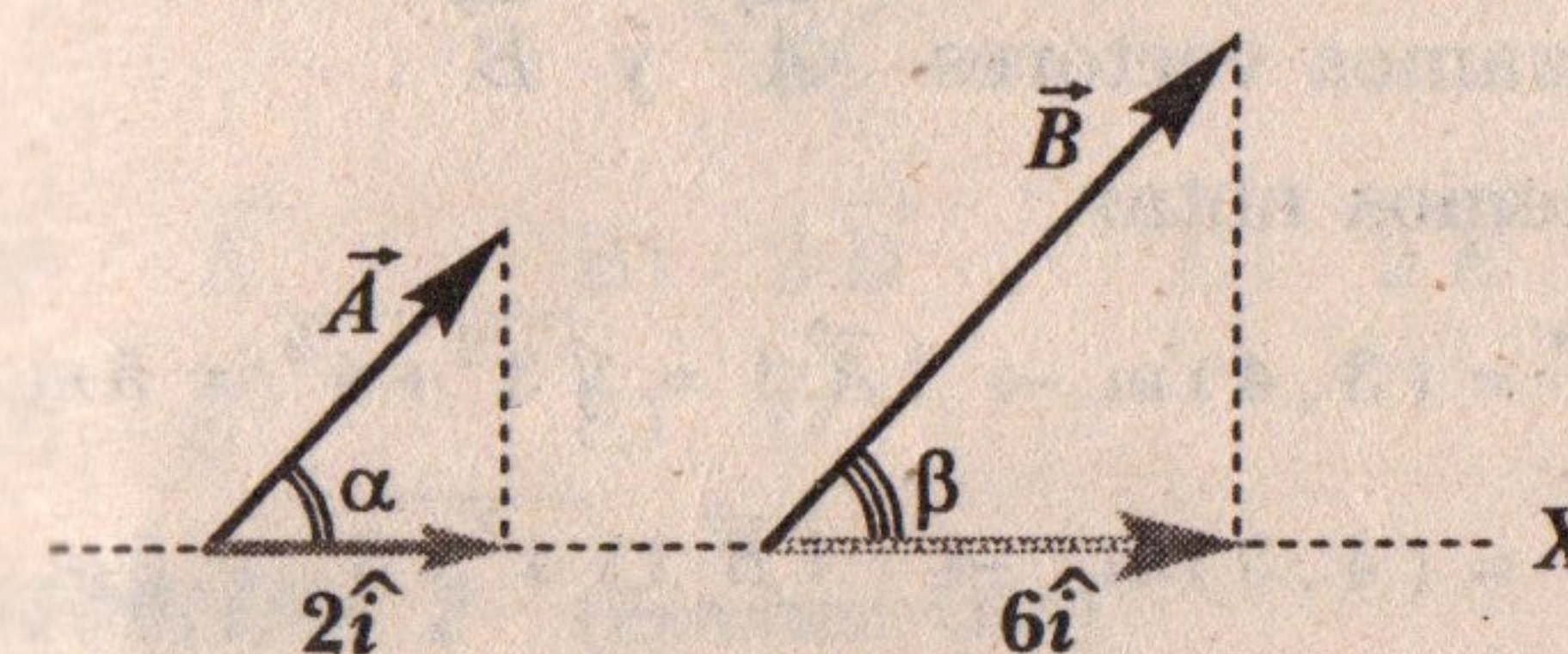
Concluimos : $\vec{A} // \vec{B}$

$$\therefore \quad \alpha = \beta$$

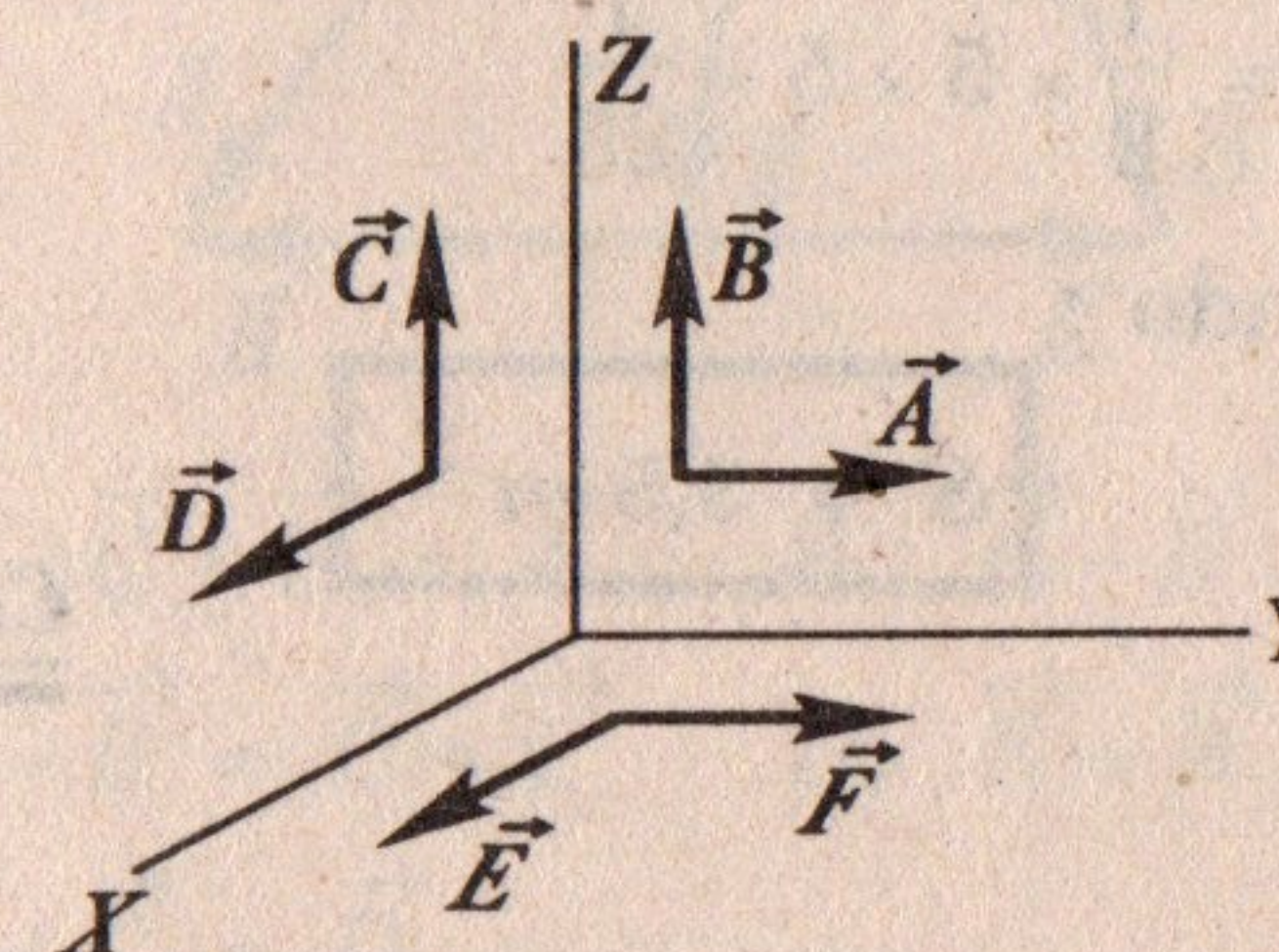
Si $B = 3A$, entonces :

$$Proy_x \bar{B} = 3\,Proy_x \bar{A}$$

$$Proy_x \bar{B} = 3 \times 2\hat{i}$$

$$\therefore \quad \boxed{Proy_x \vec{B} = 6\hat{i}}$$

Clave: E

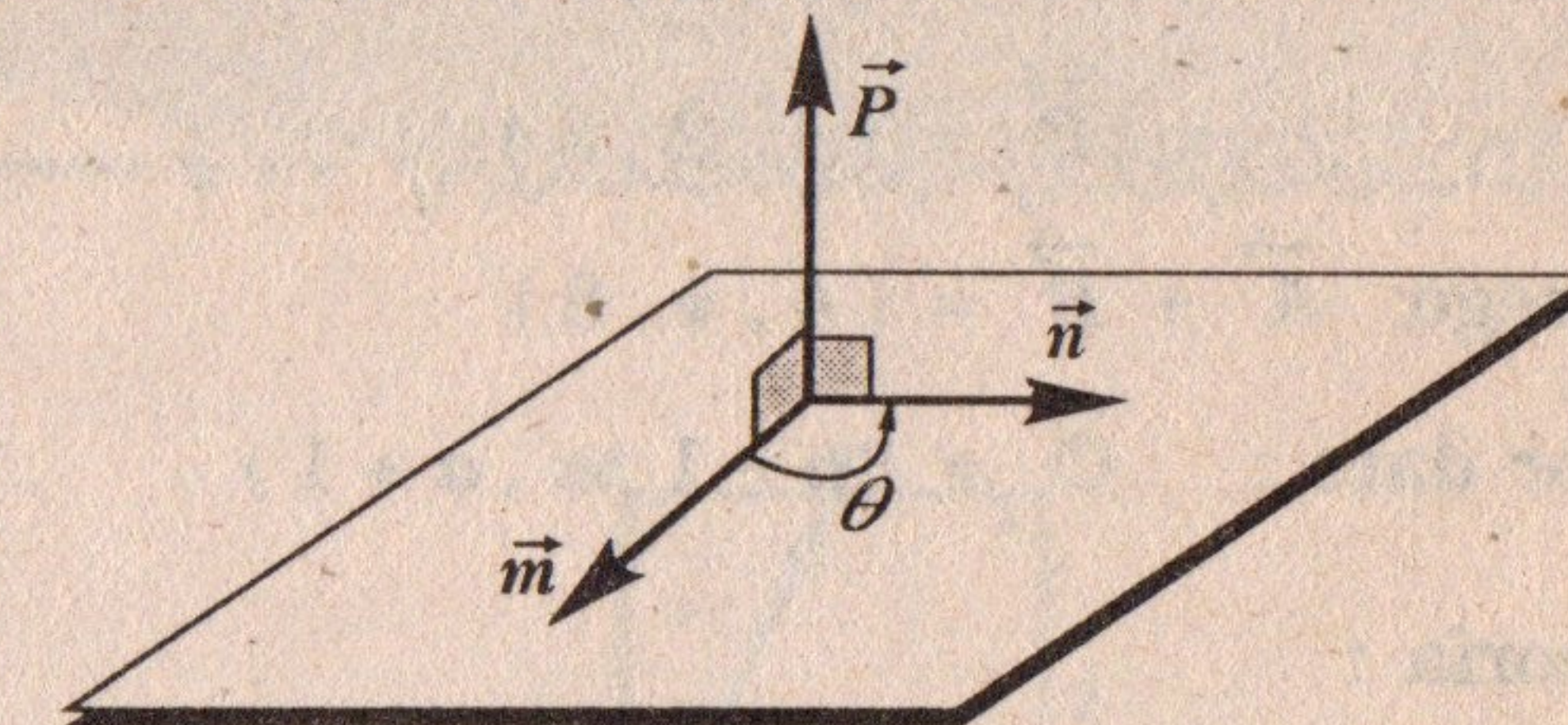
PROBLEMA 148 (Sem. CEPRE-UNI 2001-I)

Calcule la suma de los vectores unitarios de los productos $\vec{A} \times \vec{B}$, $\vec{C} \times \vec{D}$ y $\vec{E} \times \vec{F}$.

A) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ B) $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

C) $-\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ D) $\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$

E) $-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

RESOLUCIÓN

Por teoría sabemos :

$$\vec{m} \times \vec{n} = \vec{p}$$

$\vec{P}$: es perpendicular a $\vec{m}$ y $\vec{n}$

En la figura del problema y por la regla de la mano derecha y sabiendo que los vectores unitarios de X, Y y Z son : $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$;

$$\vec{\mu}_{(\vec{A}\times\vec{B})} = \hat{i}$$

$$\vec{\mu}_{(\vec{E}\times\vec{F})} = \hat{k}$$

$$\vec{\mu}_{(\vec{C}\times\vec{D})} = \hat{j}$$

Luego :

$$\boxed{\vec{\mu}_{\vec{A}\times\vec{B}} + \vec{\mu}_{\vec{C}\times\vec{D}} + \vec{\mu}_{\vec{E}\times\vec{F}} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}$$

Clave: A

PROBLEMA 149

Se tienen 3 vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$; si :

$$\vec{A} = (3, 2, 5) \; ; \; \vec{B} = (1, 2, 3) \quad \text{y}$$

$$\vec{C} = (a-1, a, a+1)$$

Hallar "a" , si se sabe que $\vec{C}$ es perpendicular a $\vec{A} + \vec{B}$.

A) 1/4 B) – 1/4

C) 1/2 D) – 1/2

E) – 4

RESOLUCIÓN

De los datos del problema:

$$\vec{A} = (3,2,5)$$

$$\vec{B} = (1,2,3)$$

Luego: $\vec{A} + \vec{B} = (4,4,8)$

Por dato : $\vec{C} = (a-1, a, a+1)$

Teoría :

Si: $\vec{C} \perp (\vec{A}+\vec{B})$. Entonces : $\vec{C}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = 0$

$$\vec{C}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = 0$$

$$(4,4,8)\cdot(a-1, a, a+1) = 0$$

$$4\times(a-1)+4\times a+8(a+1) = 0$$

$$4a-4+4a+8a+8 = 0$$

Resolviendo :

$$a = -\frac{1}{4}$$

Clave: B

PROBLEMA 150

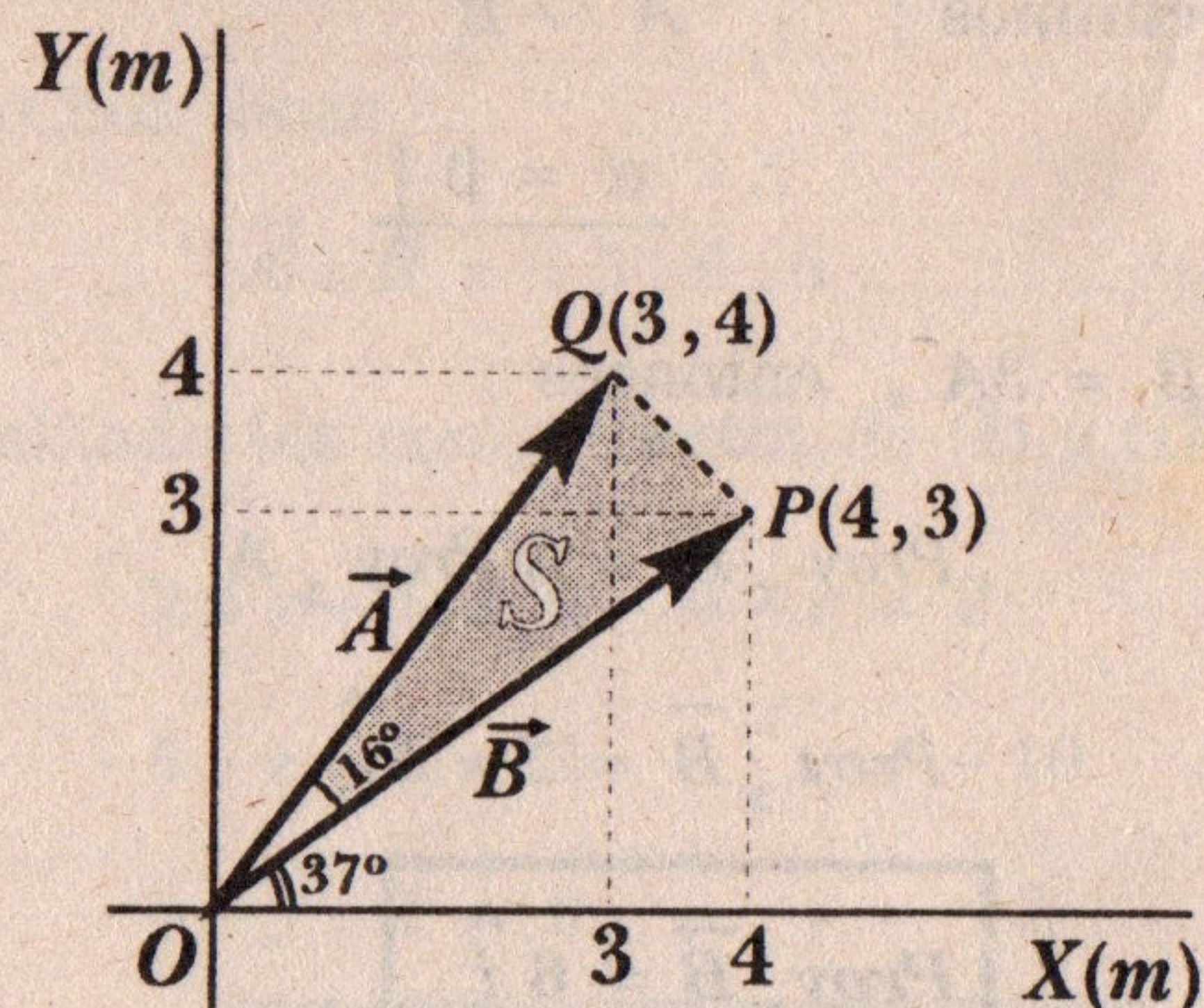
Calcular el área del triángulo que tiene como vértices : el origen de coordenadas, el punto $P:(4,3)\,m$ y el punto $Q:(3,4)\,m$

A) 3,5 m^2 B) 7 m^2

C) 12 m^2 D) 0,7 m^2

E) 6 m^2

RESOLUCIÓN

Si graficamos: los puntos P y Q en el plano cartesiano.

Trazamos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Podemos notar :

$$\vec{A} = (3,4)\,m \rightarrow |\vec{A}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5\,m$$

$$\vec{B} = (4,3)\,m \rightarrow |\vec{B}| \sqrt{4^2+3^2} = 5\,m$$

Por teoría :

$$S = \frac{1}{2}\cdot|\vec{A}\times\vec{B}|$$

Luego :

$$S = \frac{1}{2}\cdot|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\,sen\,16°$$

$$S = \frac{1}{2}\times5\times5\times\frac{7}{25}$$

Resolviendo :

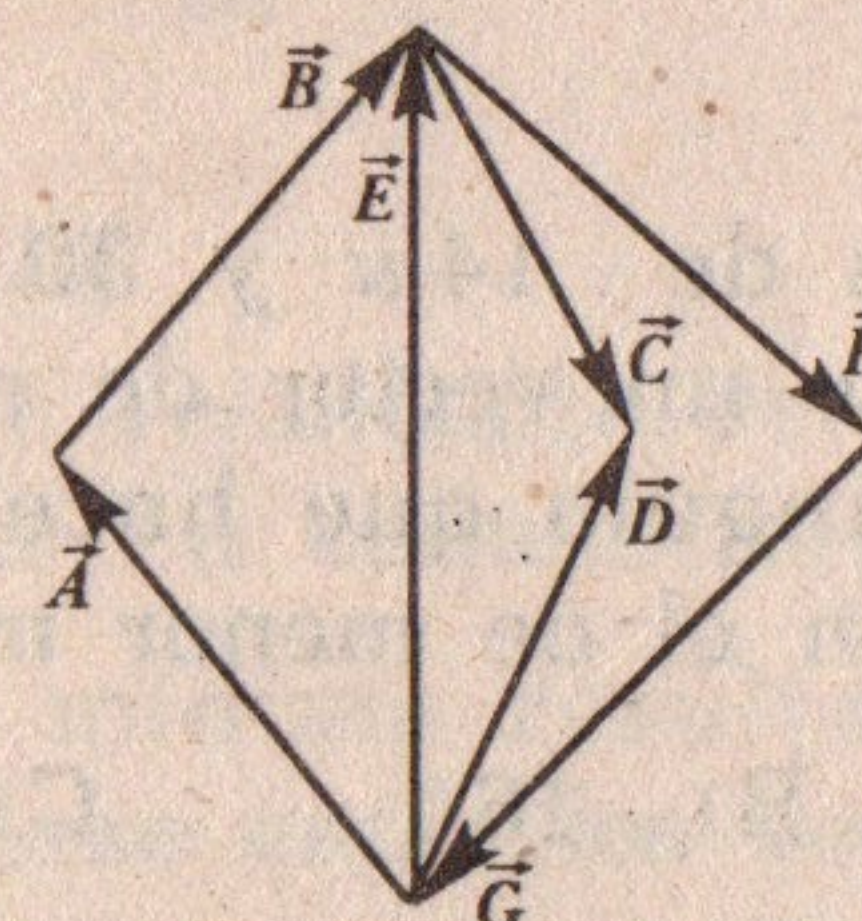
$$S = 3,5\,m^2$$

Clave: A

ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS RESUELTOS

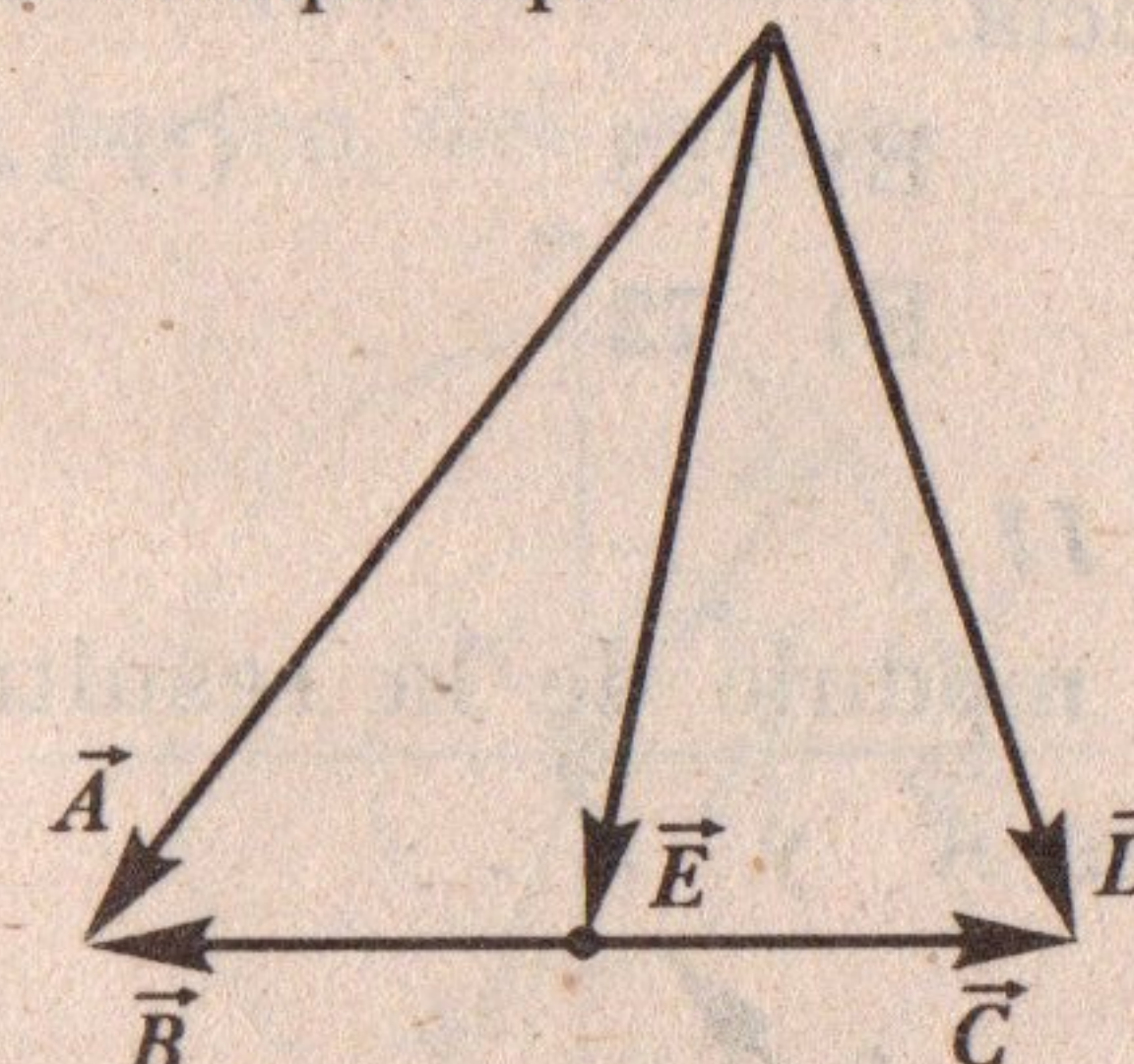
Análisis Vectorial

PROBLEMA 1 (Examen UNI)

Hallar la suma de todos los vectores que se muestran en la figura :

A) $\vec{E}$ B) $2\vec{D}$ C) $2\vec{E}$

D) $-\vec{E}$ E) $\vec{D}$

PROBLEMA 2 (Examen UNI)

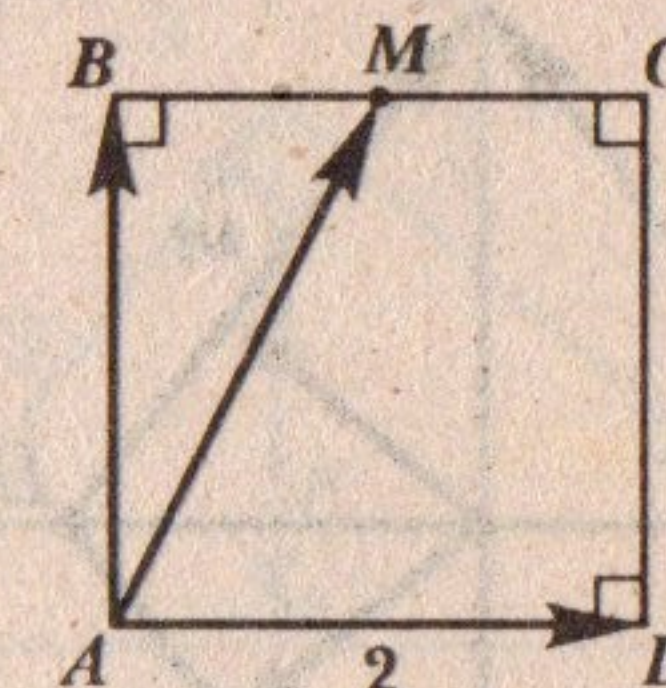
Para los vectores mostrados en la figura no se cumple que :

A) $\vec{D}-\vec{C}+\vec{B}=\vec{A}$ B) $\vec{A}-\vec{E}=\vec{B}$

C) $\vec{A}-\vec{B}=\vec{D}+\vec{C}$ D) $\vec{E}+\vec{B}=\vec{A}$

E) $\vec{E}+\vec{C}=\vec{D}$

PROBLEMA 3

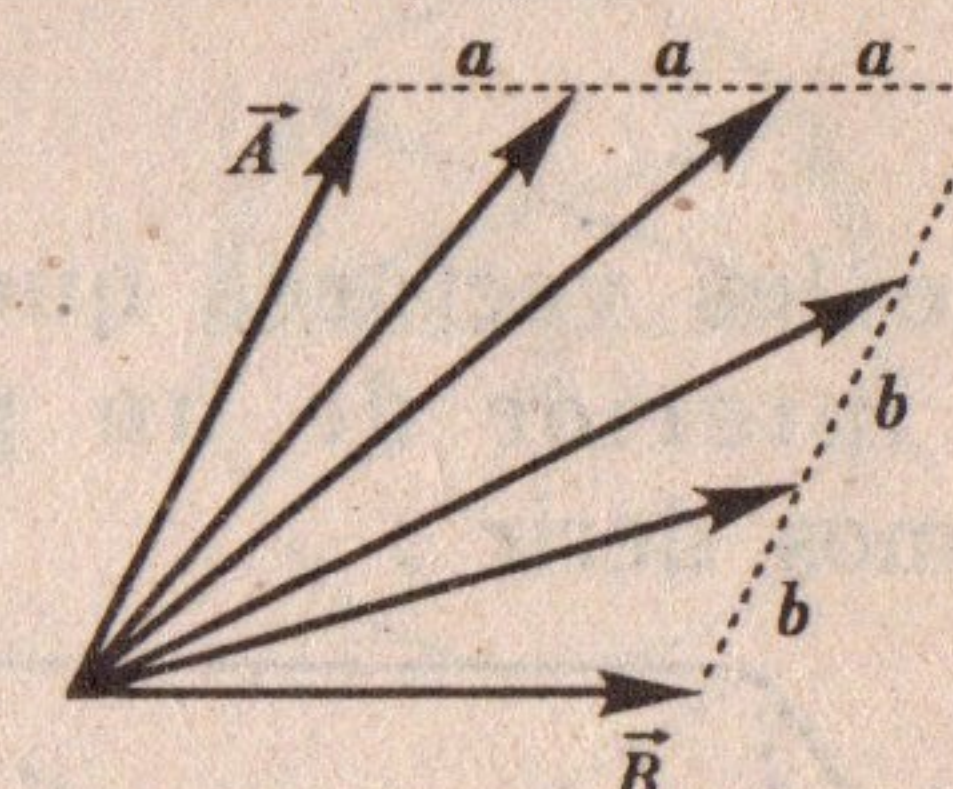
Cual es el ángulo que hace la resultante con el vector $\vec{AB}$.

M : punto medio del lado del cuadrado.

A) 53° B) 37° C) 60°

D) 30° E) 16°

PROBLEMA 4

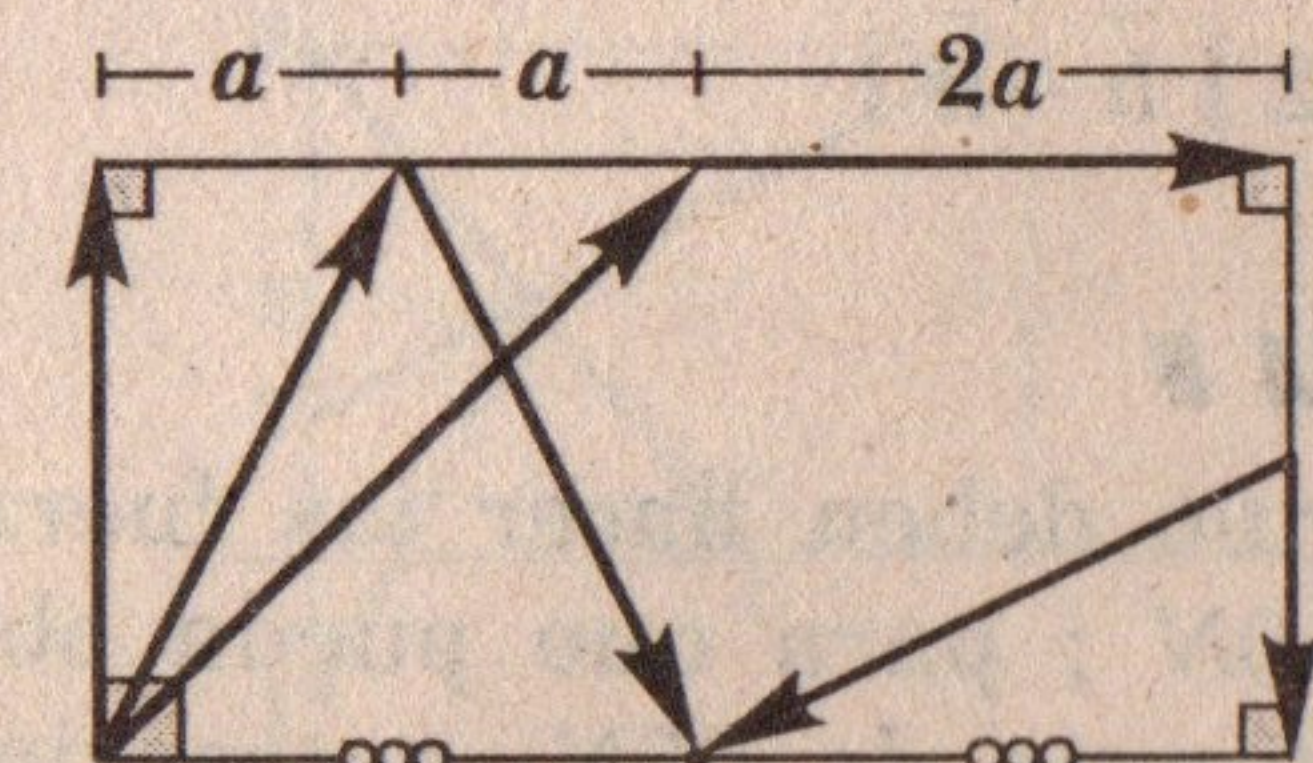
Exprese la resultante vectorial en términos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

$MNPQ$: es un paralelogramo.

A) $(\vec{A}+\vec{B})$ B) $2(\vec{A}+\vec{B})$

C) $3(\vec{A}+\vec{B})$ D) $4(\vec{A}+\vec{B})$

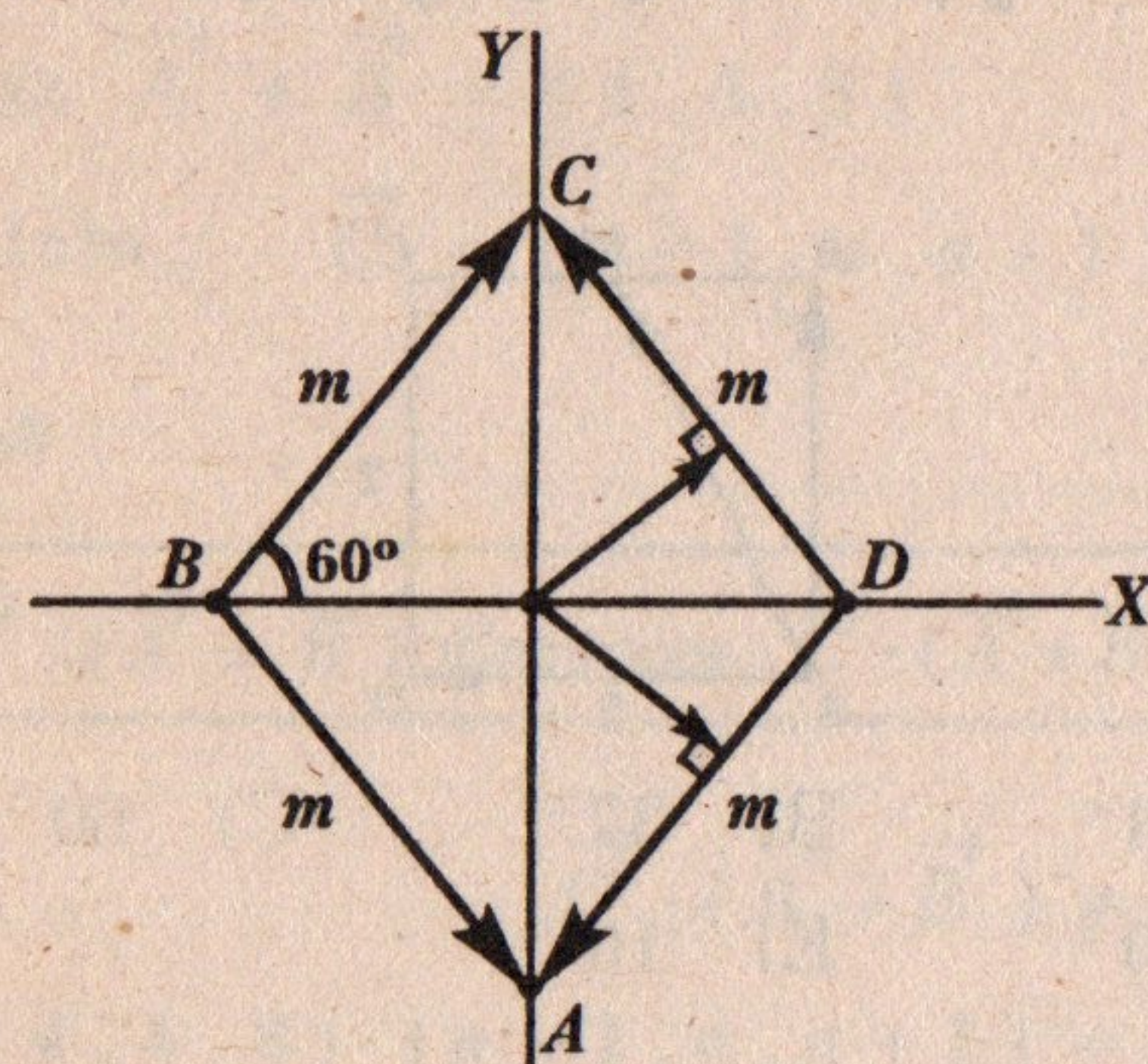
E) $5(\vec{A}+\vec{B})$

PROBLEMA 5

El módulo de la resultante del conjunto de vectores es :

A) $\sqrt{22}\,a$ B) $\sqrt{5}\,a$ C) $2\sqrt{5}\,a$

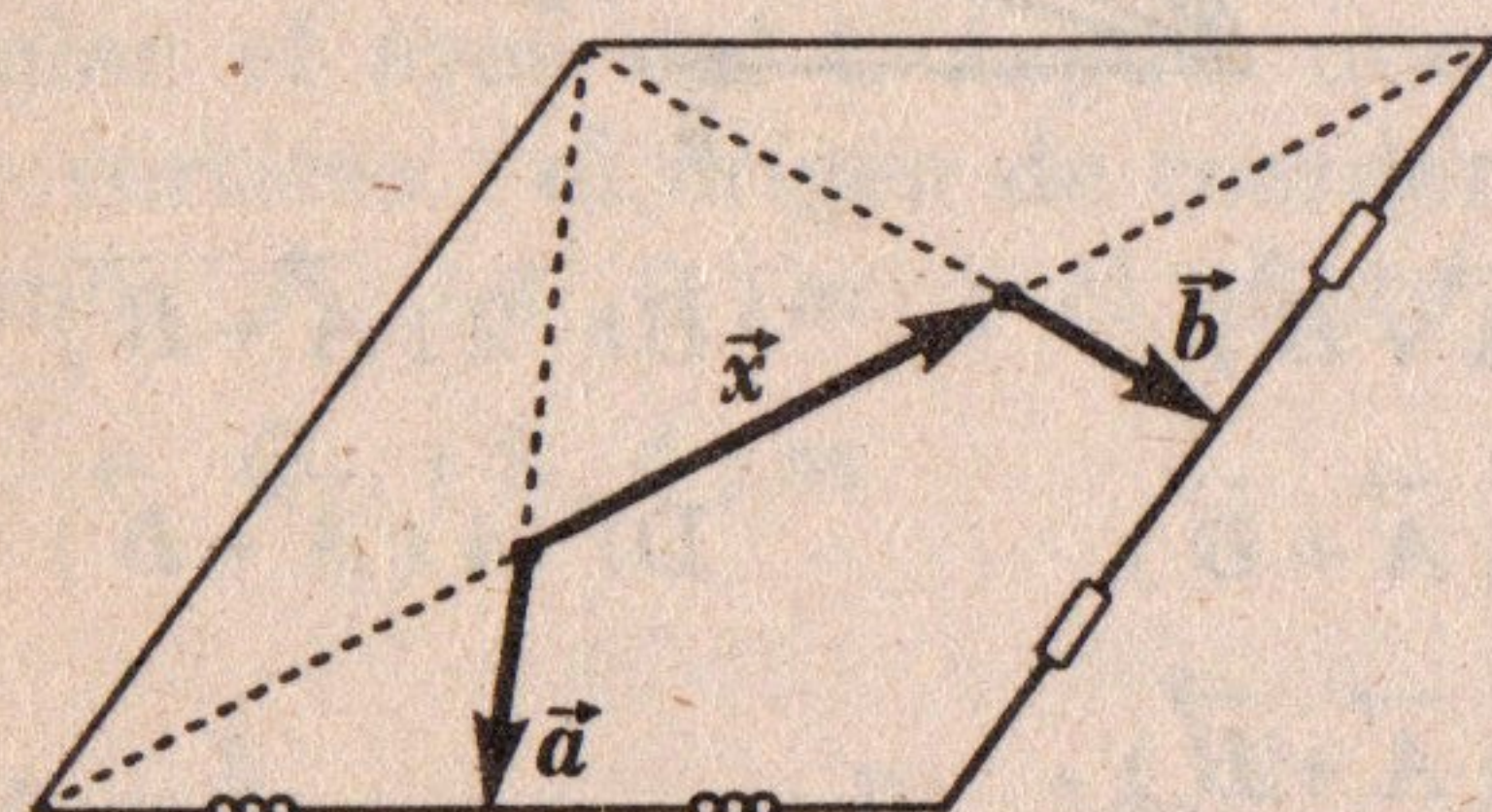
D) $2\sqrt{2}\,a$ E) $5\sqrt{2}\,a$

PROBLEMA 6

Hallar la resultante del sistema de vectores mostrados. $ABCD$: es un rombo.

A) $\frac{3m}{4}$ B) $\frac{3}{4}\sqrt{3}\,m$ C) $\frac{3m}{5}$

D) $\frac{3}{8}\sqrt{3}\,m$ E) $\frac{m}{2}$

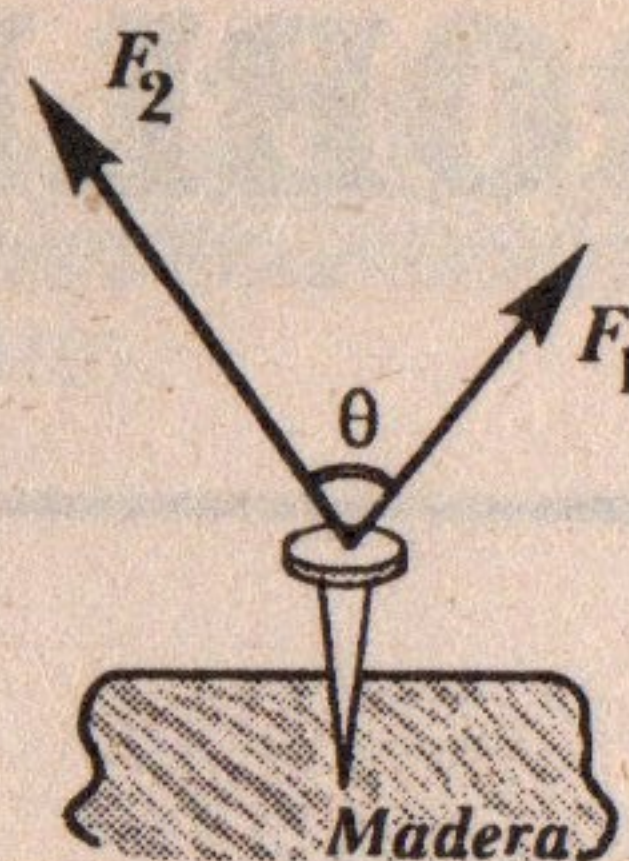
PROBLEMA 7

Respecto de los vectores que se ubican en el interior de un paralelogramo, podemos decir :

A) $x = 6\,|\,\overline{a} - \overline{b}\,|$ B) $x = 5\,|\,\overline{b} - \overline{a}\,|$

C) $x = 4\,|\,\overline{a} - \overline{b}\,|$ D) $x = 3\,|\,\overline{b} - \overline{a}\,|$

E) $\overline{x} = 2\,|\,\overline{b} - \overline{a}\,|$

PROBLEMA 8

Que ángulo deben hacer las fuerzas de $24N$ y $40N$; para que pueda obtenerse una fuerza de $56N$, necesaria para sacar el clavo.

A) $30°$ B) $60°$ C) $37°$

D) $53°$ E) $72°$

PROBLEMA 9

Dos vectores de $14u$ y $30u$ dan como resultante un vector de módulo 40. Hallar el ángulo que hace el vector resultante con el de menor módulo.

A) $53°$ B) $16°$ C) $37°$

D) $72°$ E) $53°/2$

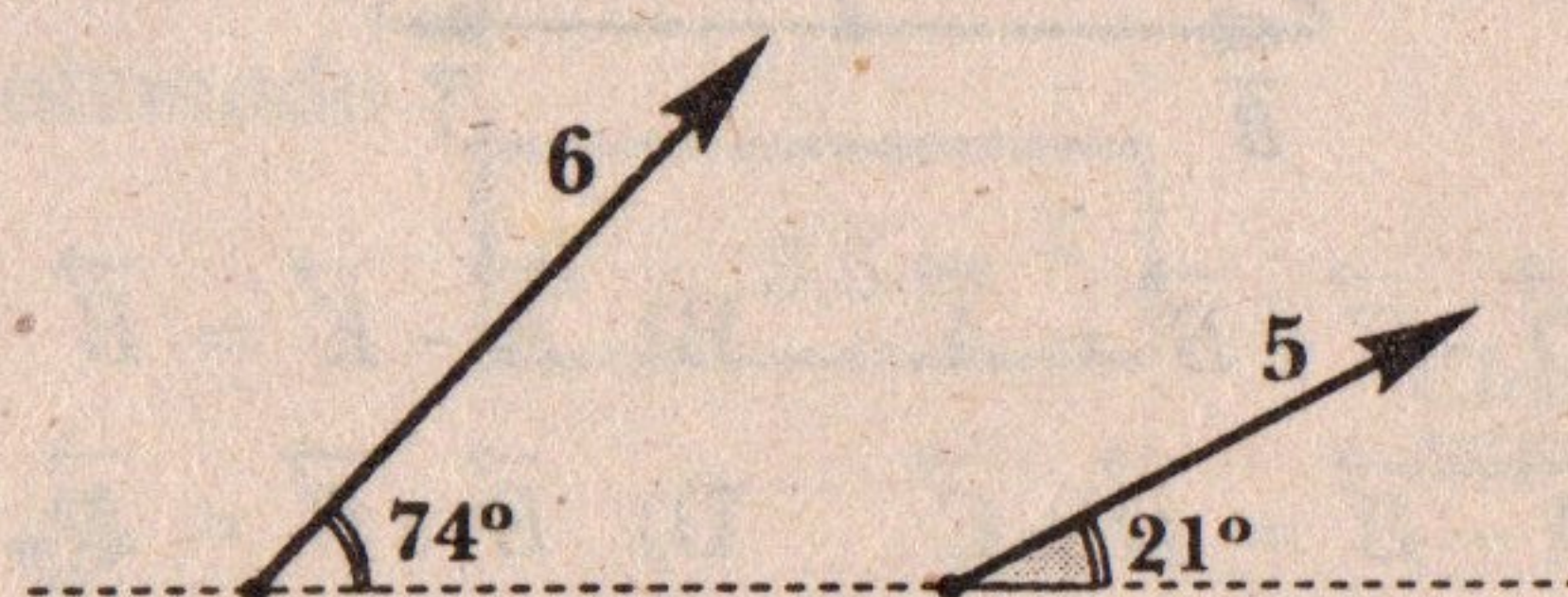
PROBLEMA 10

Cual es el ángulo que hacen 2 vectores de igual módulo; si además se cumple que el módulo de su vector suma es dos veces el módulo de su vector diferencia.

A) $37°$ B) $53°$ C) $45°$

D) $16°$ E) $72°$

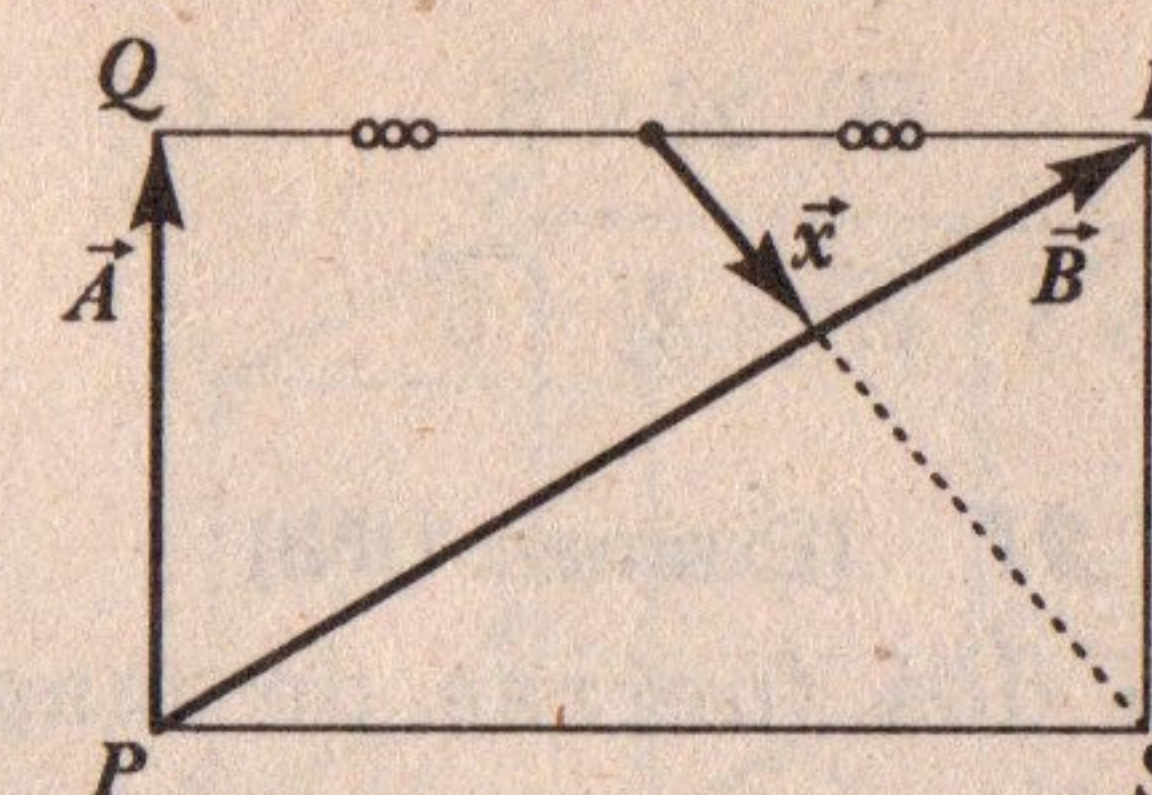
PROBLEMA 11

Hallar el módulo de la resultante de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

A) 10 B) $\sqrt{99}$ C) $\sqrt{97}$

D) $4\sqrt{6}$ E) $5\sqrt{6}$

PROBLEMA 12

Si $\vec{x} = m\vec{A} + n\vec{B}$, hallar $m - n$.

$PQRS$: es un rectángulo.

A) $\frac{2}{3}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$

D) $-\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

PROBLEMA 13

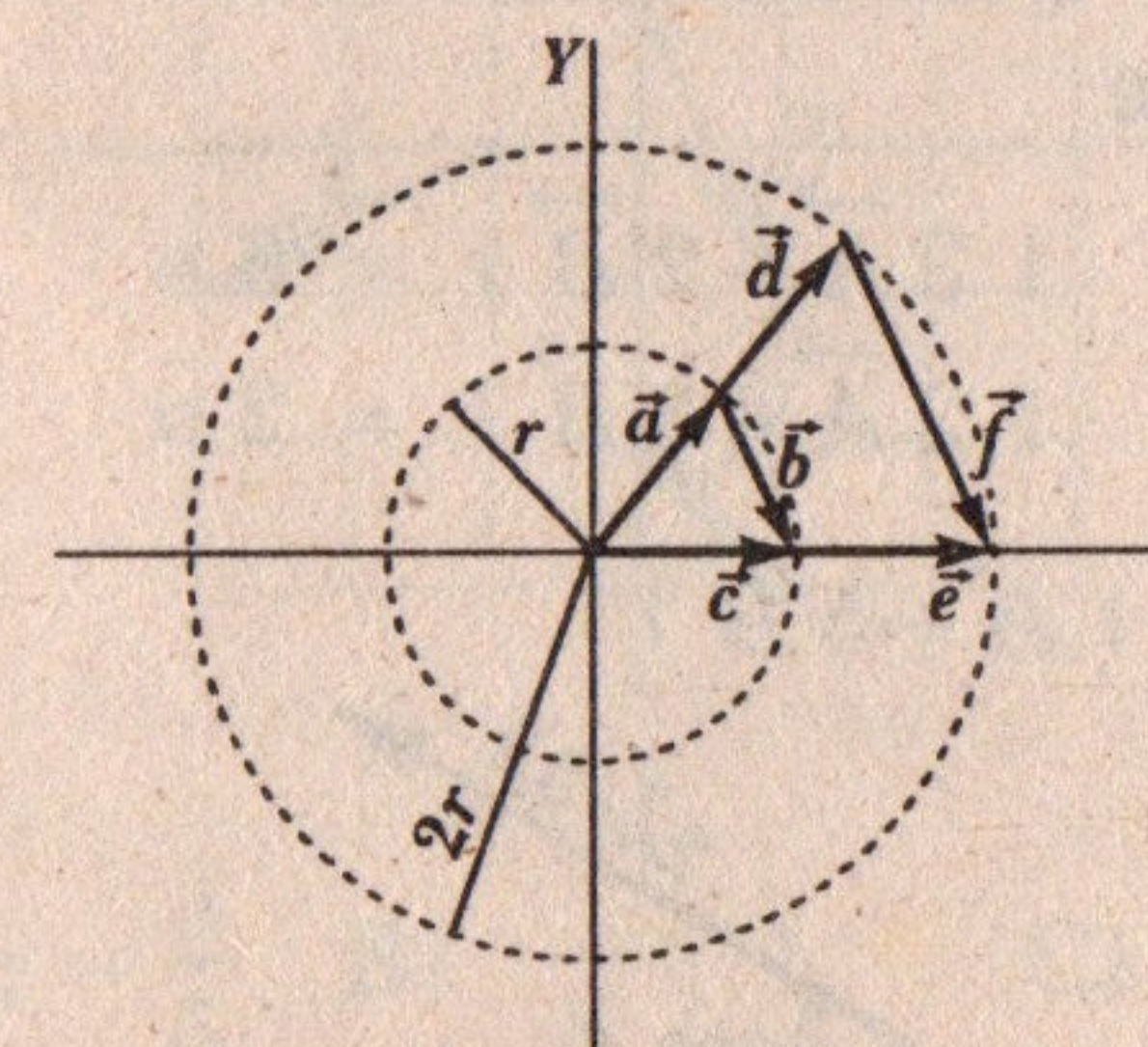
La máxima resultante de dos vectores es $8u$ y es $7u$ cuando forman $60°$.

Evalúe la mínima resultante que podría obtenerse entre los vectores.

A) $1u$ B) $2u$ C) $3u$

D) $4u$ E) $5u$

PROBLEMA 14 (Examen UNI 96-II)

Marque la expresión incorrecta. Considerando que los vectores $\vec{a}$, $\vec{d}$, $\vec{c}$ y $\vec{e}$ parten del origen.

A) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{e}$

B) La componente de $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$ es $|\,4\vec{c}\,|$.

C) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{f} = 2\vec{e}$

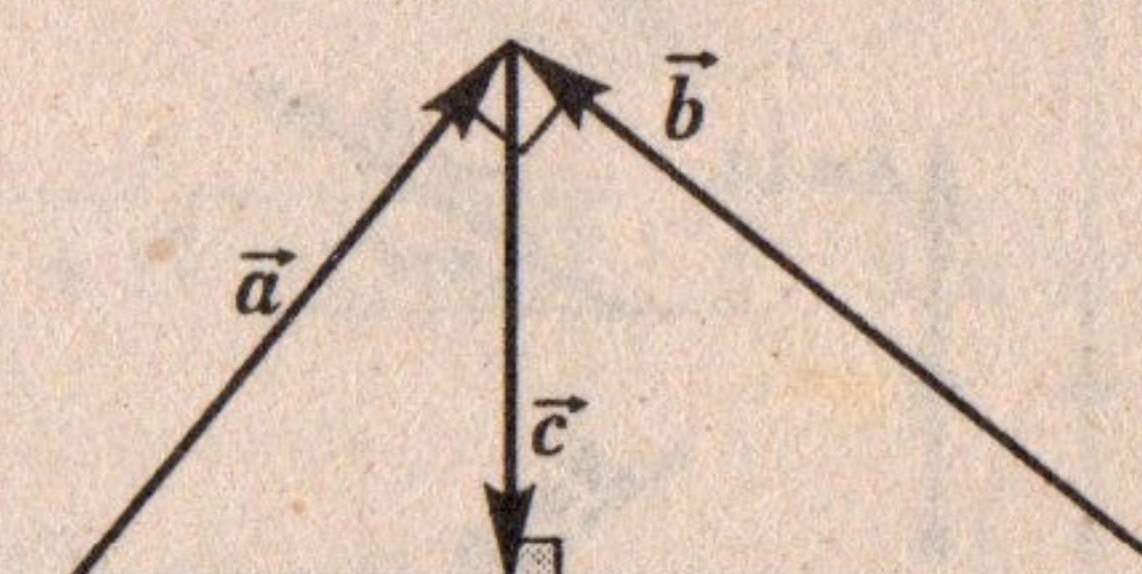
D) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{e} = -\vec{c}$

E) $\vec{d} - \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

PROBLEMA 15

En la configuración de vectores mostrados, se sabe que :

$$\vec{c} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}$$

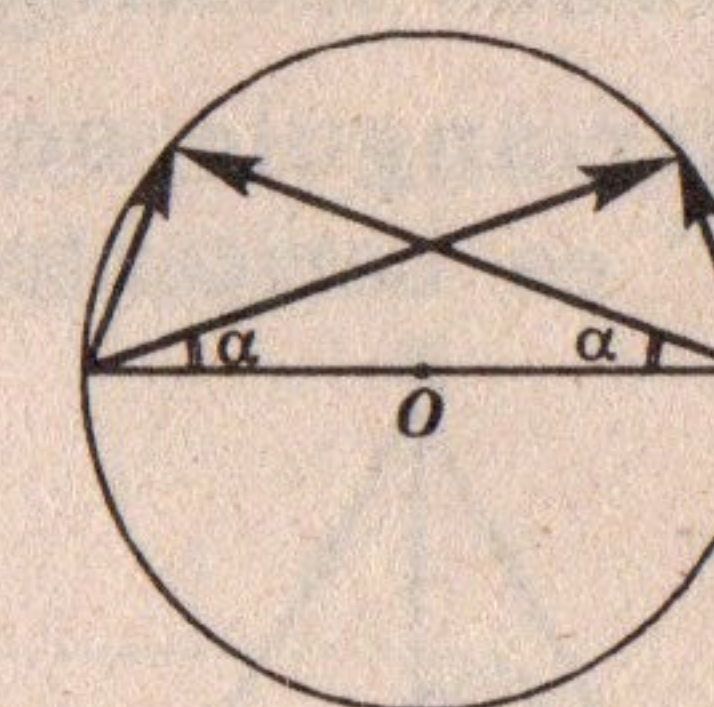
Hallar $k_1 + k_2$.

A) -2 B) 2 C) 1

D) -1 E) $1/2$

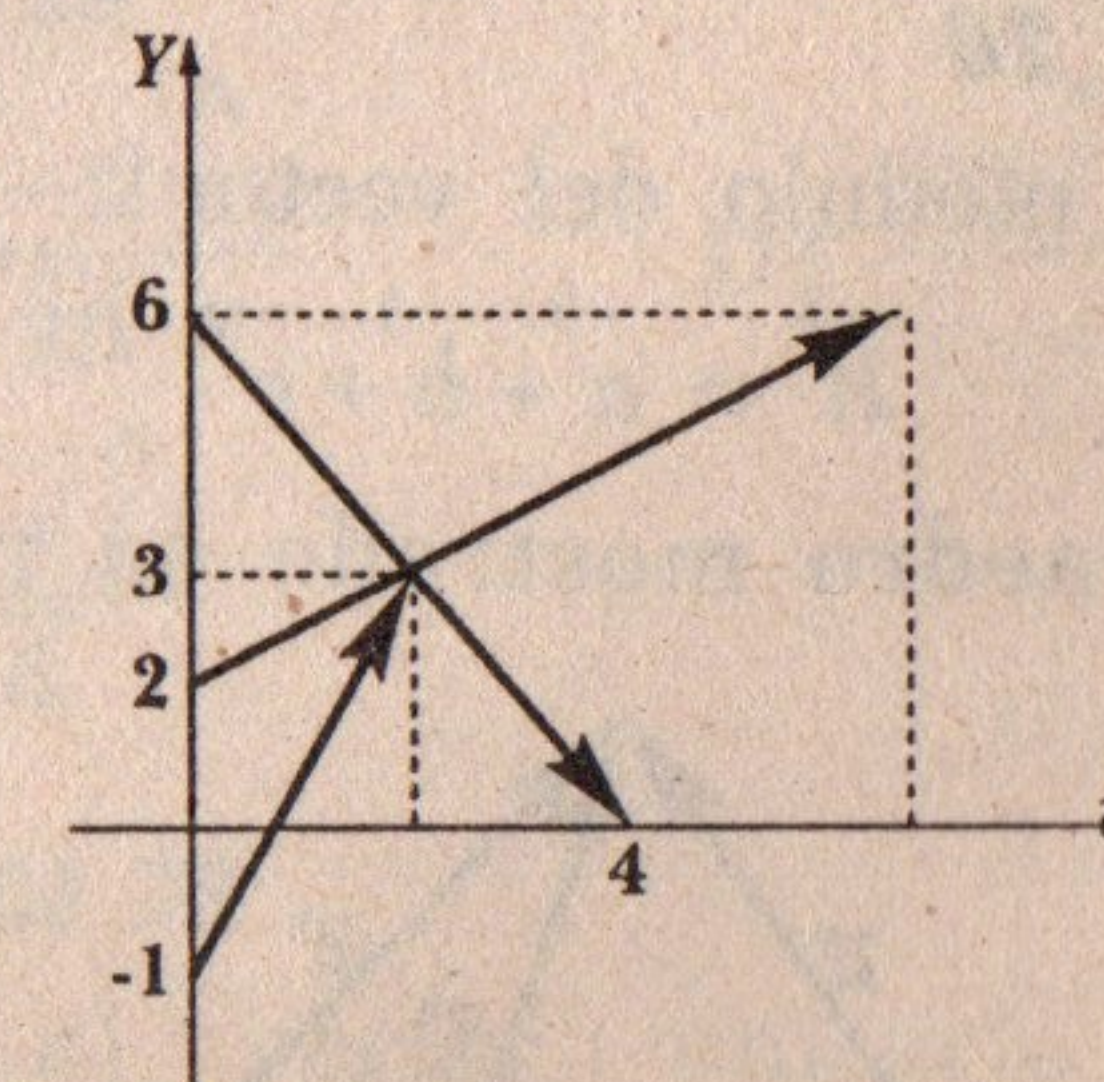
PROBLEMA 16

Hallar el módulo de la resultante de los 4 vectores mostrados; si el radio de la circunferencia es R.

A) $4R\,sen\,2\alpha$ B) $4R\cos 2\alpha$

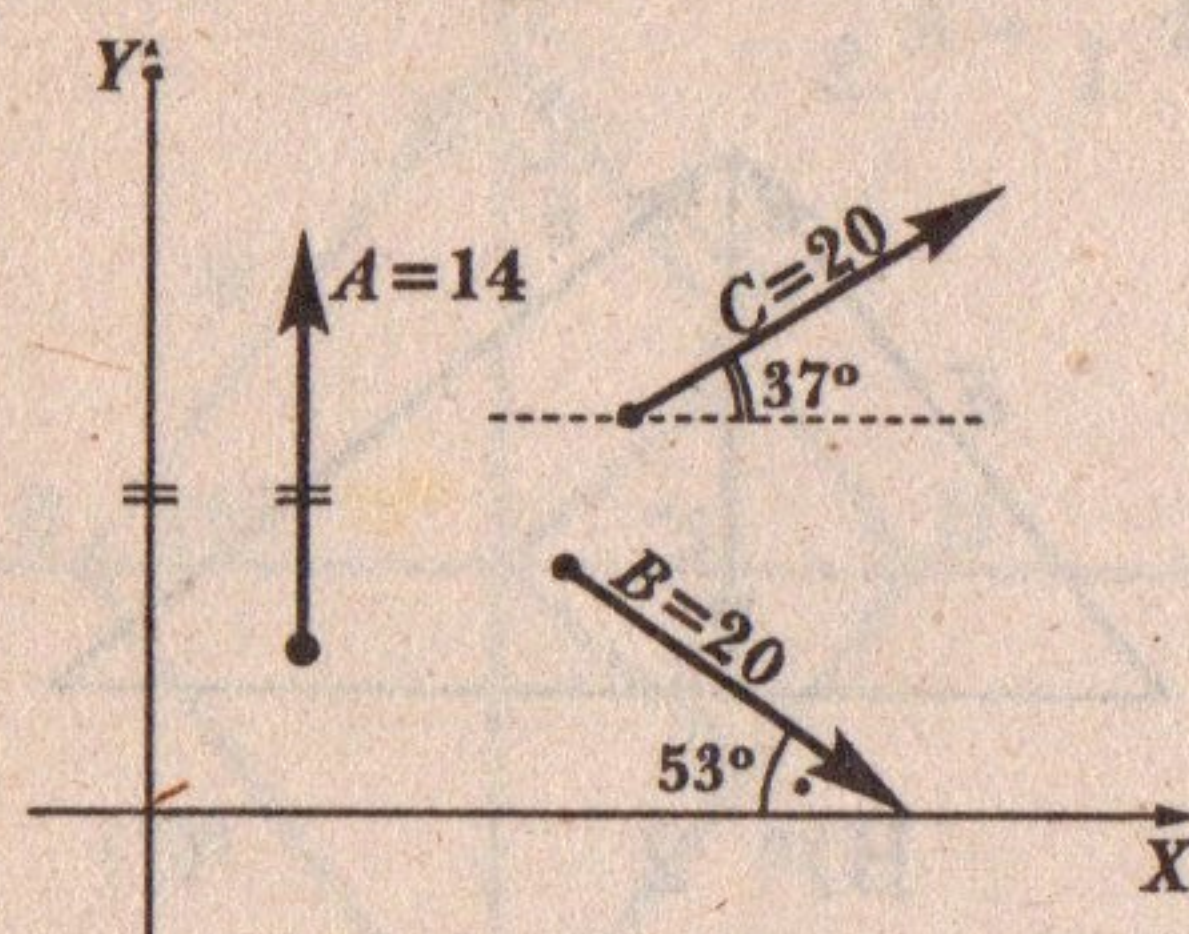
C) $R\cos 2\alpha$ D) $2R\,sen\,2\alpha$

E) $8R\,sen\,2\alpha$

PROBLEMA 17

Hallar el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrados.

A) $\sqrt{198}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $10\sqrt{2}$

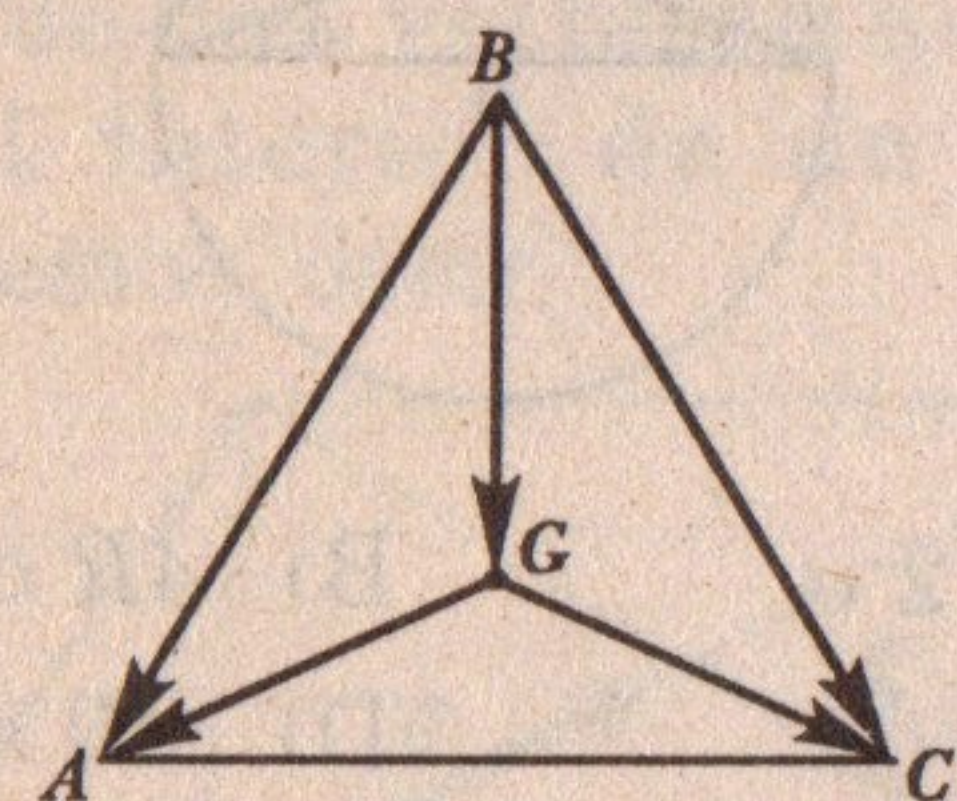
D) 20 E) 10,5

PROBLEMA 18

Si a la resultante de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ agregamos $n\,\vec{c}$ y el resultado final es un vector en la dirección " $\hat{i}$ ". Hallar "n".

A) 1/6 B) − 1/6 C) 1/3
D) 2/3 E) 1/2

PROBLEMA 19

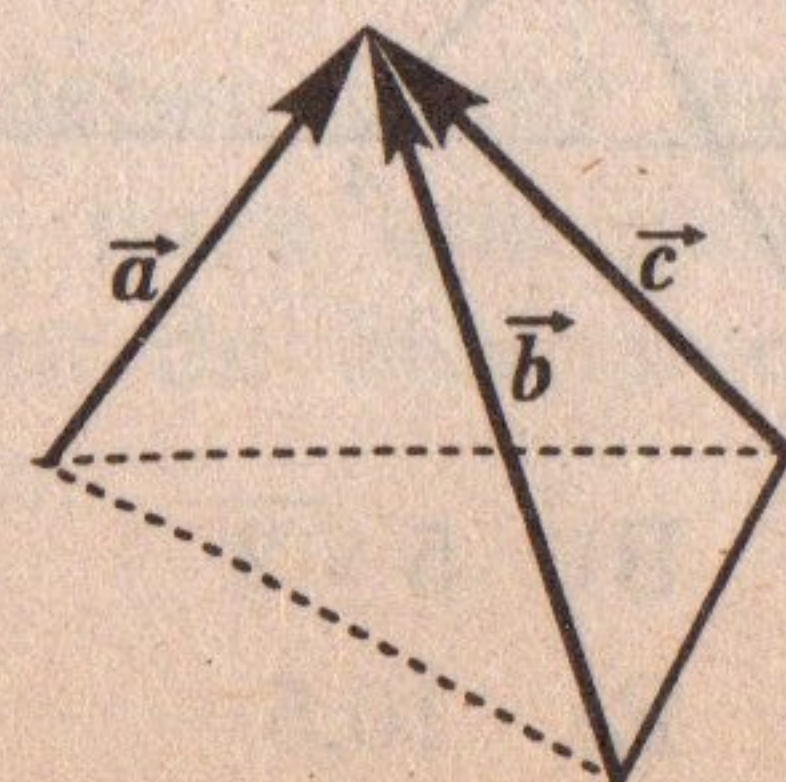
Hallar el módulo de la resultante del sistema de vectores mostrados.

ABC : es un triángulo equilátero de lado "l" y "G" es baricentro.

A) $2l\sqrt{3}$ B) $5l\sqrt{3}/3$
C) $11\,l\sqrt{3}/6$ D) $5\,l\sqrt{3}$
E) $10\,l$

PROBLEMA 20

Hallar el módulo del vector :

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

si el tetraedro mostrado es regular y de lado l.

A) $l\sqrt{6}$ B) $2l\sqrt{6}$ C) $l\sqrt{5}$
D) $l\sqrt{5+\sqrt{3}}$ E) $2l\sqrt{5}$

PROBLEMA 21 (Examen UNI)

Se tienen dos fuerzas de magnitudes 10 y 20 N. La resultante es 10 N. El ángulo "α" que forman las dos fuerzas es tal que :

A) $0 \le \alpha < \pi/4$ B) $\pi/4 \le \alpha < \pi/2$
C) $\pi/2 \le \alpha < 3\pi/4$ D) $3\pi/4 \le \alpha < \pi$
E) $3\pi/4 \le \alpha < \dfrac{5\pi}{4}$

PROBLEMA 22

Si $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$; además $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{4} = \dfrac{c}{5}$

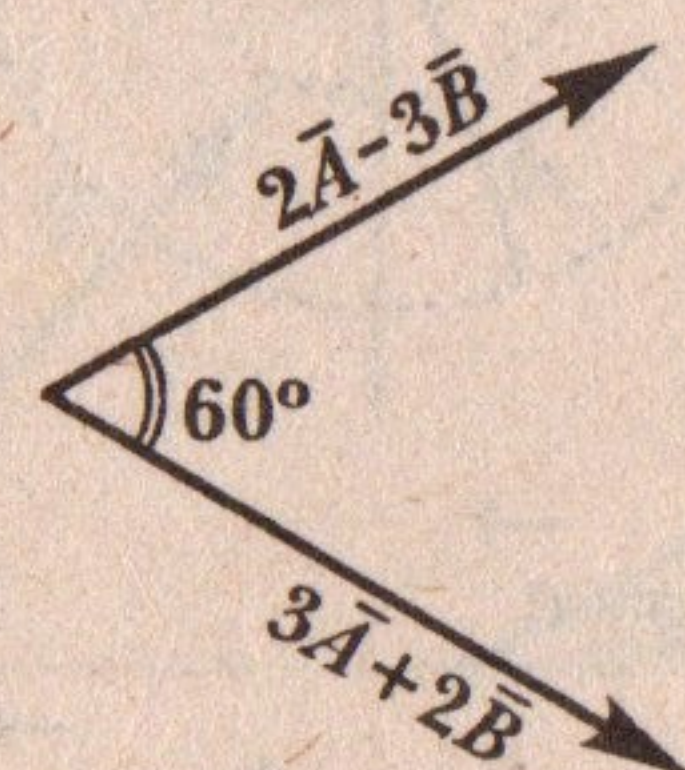
Hallar : $\dfrac{2\,|\,\vec{c} + 2\,\vec{b}\,|}{|\,\vec{a} + \vec{b}\,|}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 1/2 E) 1/4

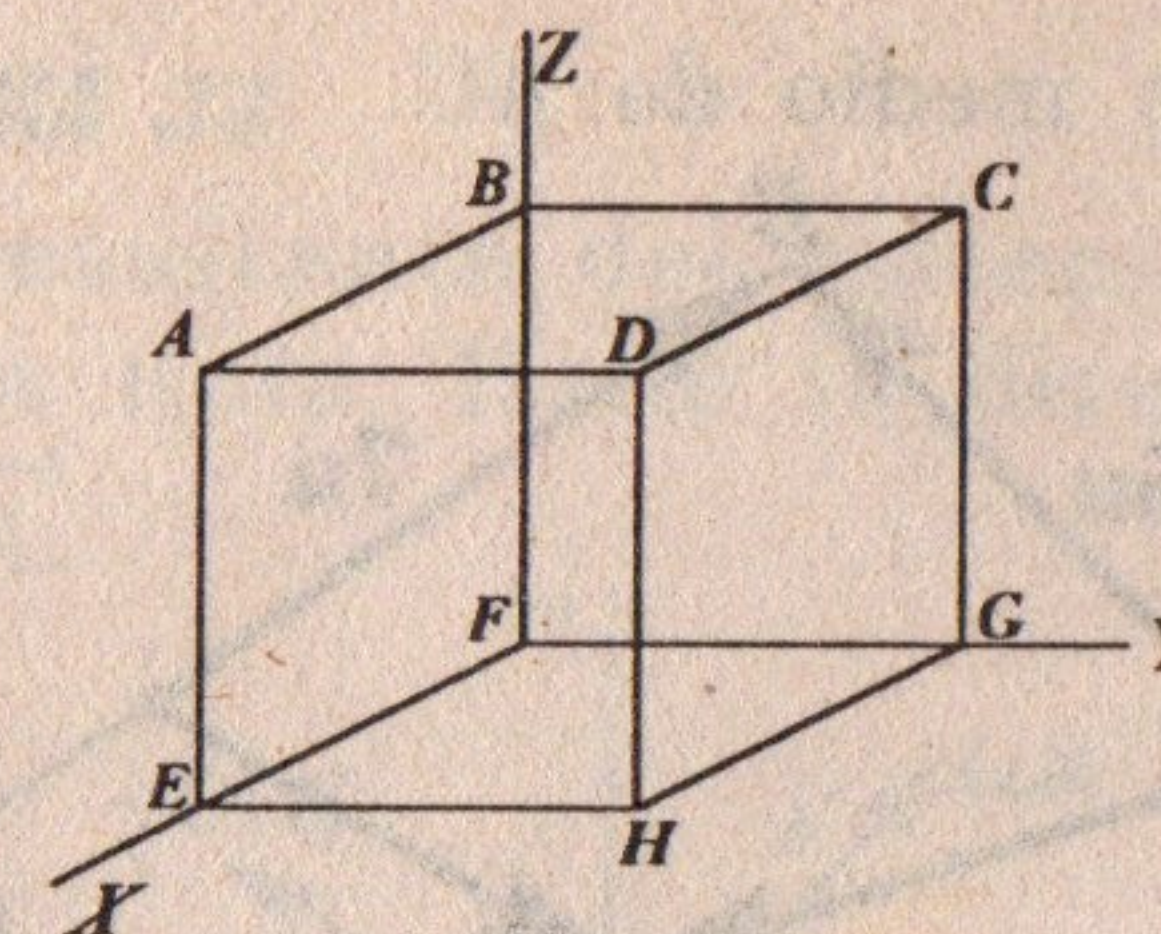
PROBLEMA 23

Sabiendo que entre 2 vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se cumple :

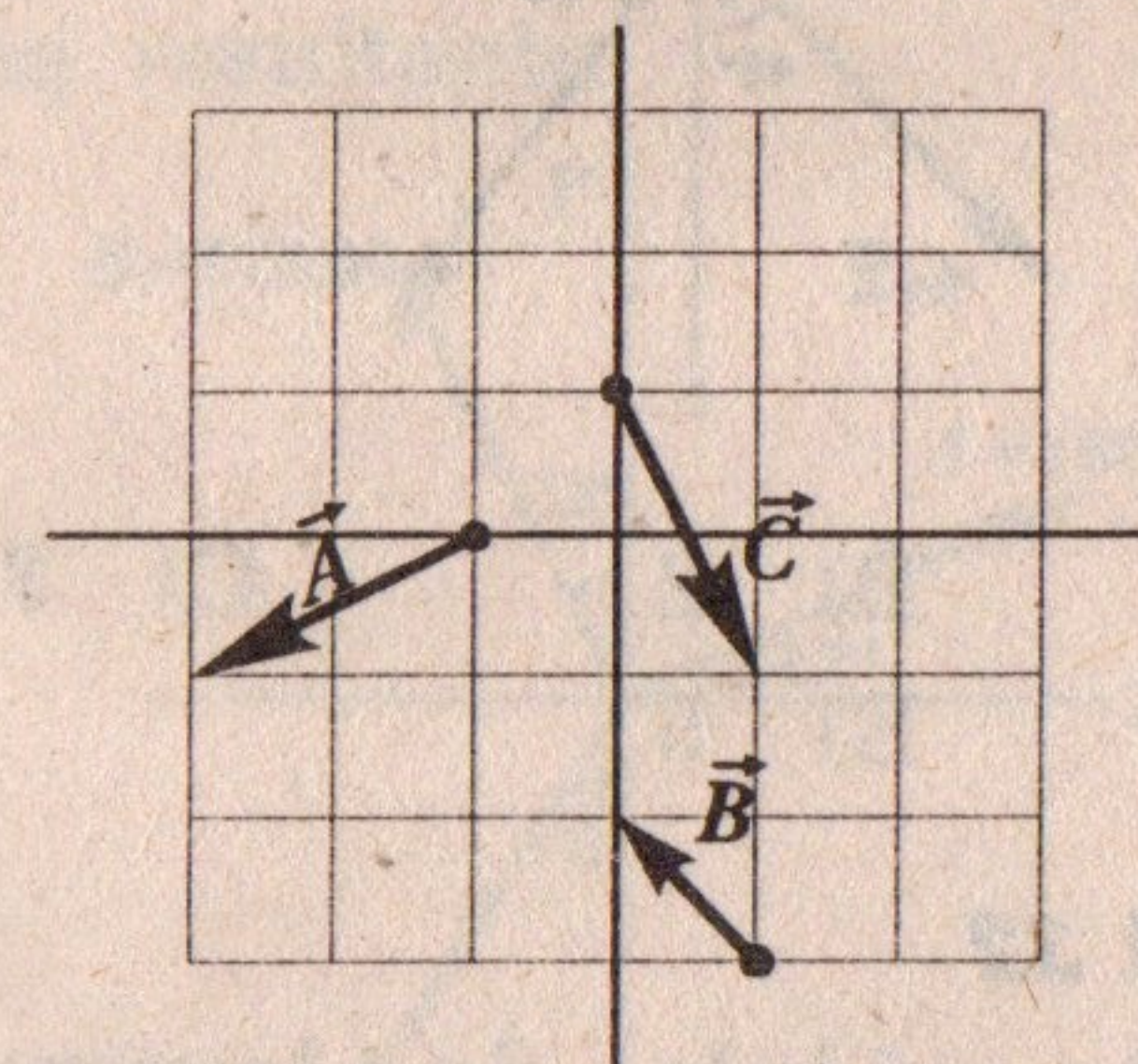
$$|\,3\vec{A} + 2\vec{B}\,| = 6\,u$$
$$|\,2\vec{A} - 3\vec{B}\,| = 2\,u$$

Hallar : $|\,\vec{A} + 5\vec{B}\,|$

A) $\sqrt{7}\,u$ B) $2\sqrt{7}\,u$ C) $3\sqrt{7}\,u$
D) $4\sqrt{7}\,u$ E) $5\sqrt{7}\,u$

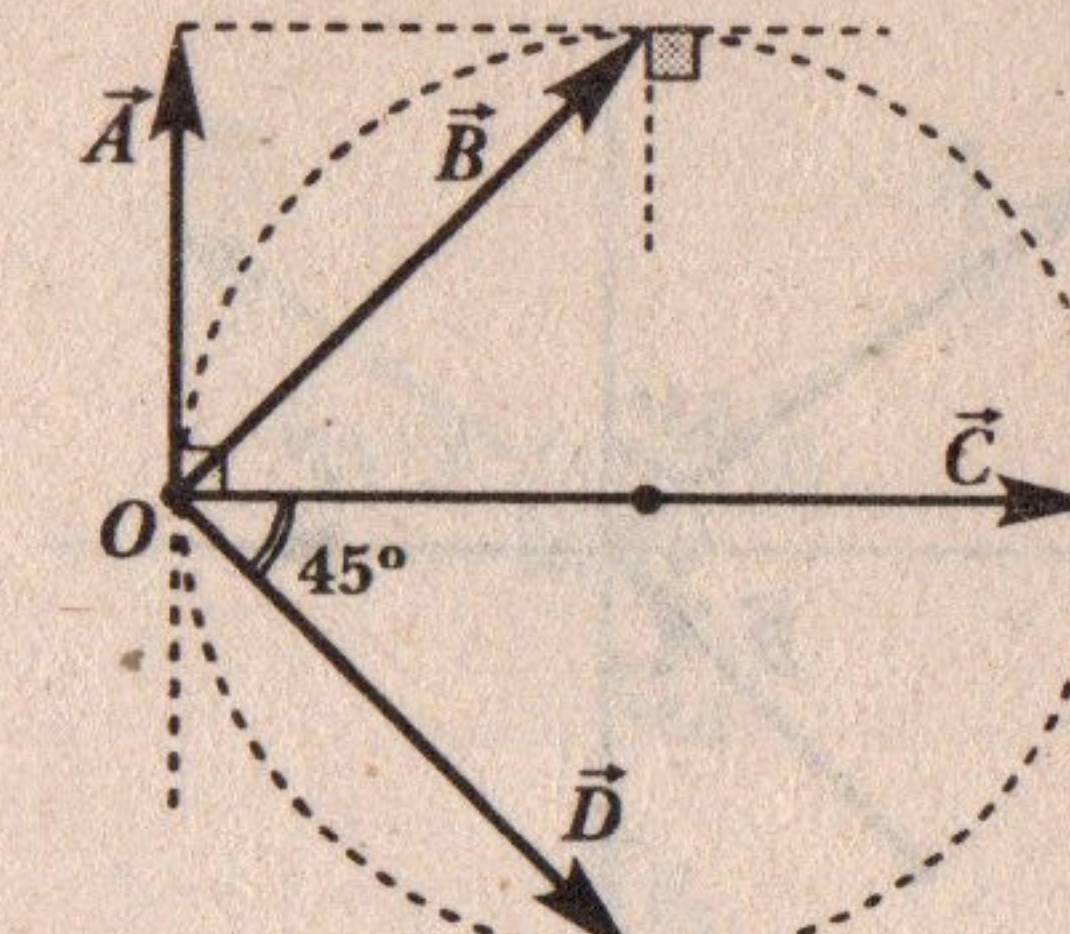
PROBLEMA 24

En el cubo de la figura, se cumple respecto de $\vec{R} = \vec{AG} + \vec{BH}$.

A) $\vec{R} = (\vec{CB} + \vec{GC})$
B) $\vec{R} = 2\,\vec{BA}$
C) $\vec{R} = (\vec{BC} + 2\,\vec{CG})$
D) $\vec{R} = 2\,(\vec{BC} + \vec{CG})$
E) $\vec{R} = 2\,(\vec{CB} - \vec{GC})$

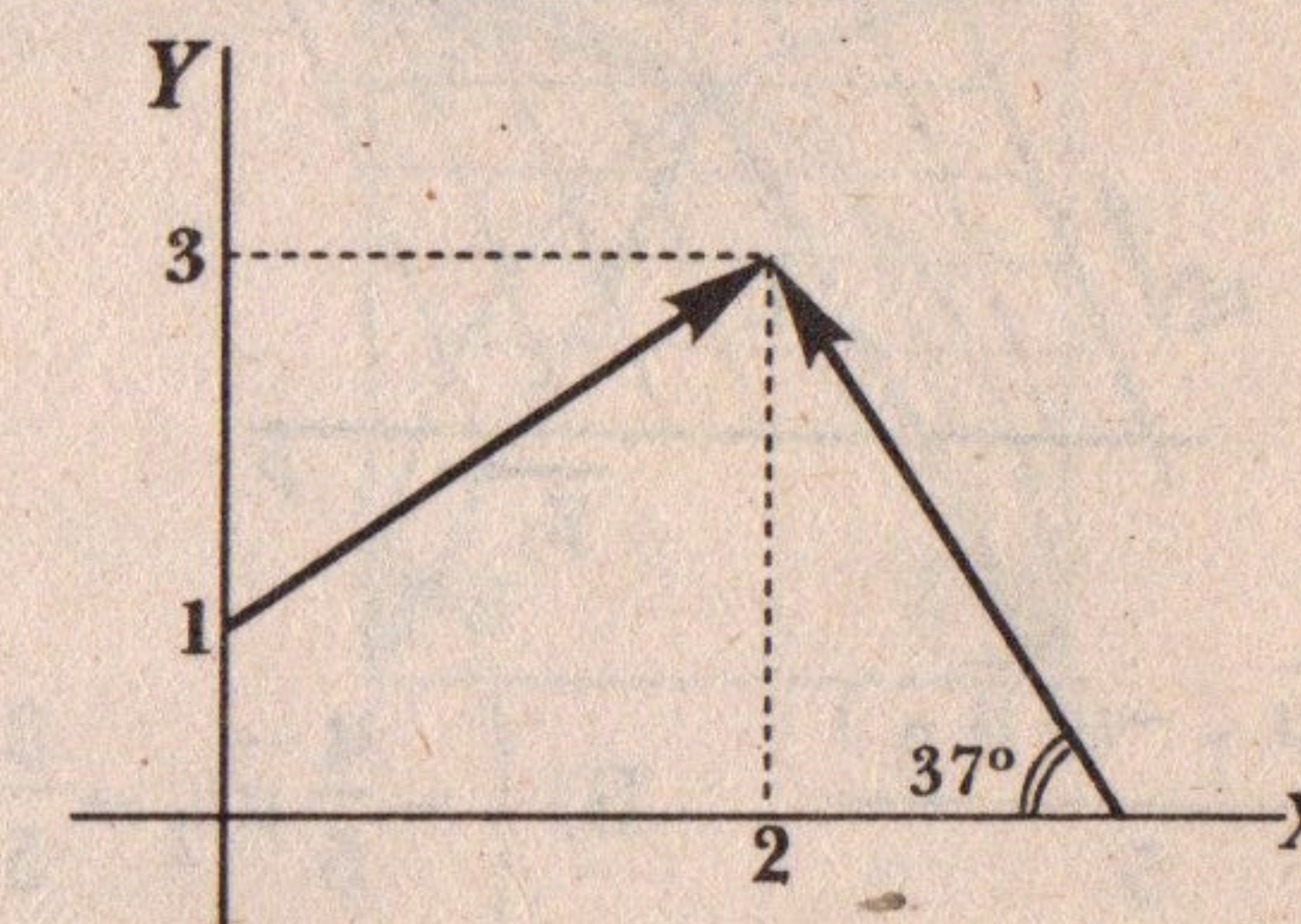
PROBLEMA 25 (Examen UNI 95)

Los vectores mostrados en la figura están relacionados entre sí mediante : $\vec{B} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{C}$, donde "$\alpha$" y "$\beta$" son números reales. Determinar "α" y "β".

A) $\dfrac{1}{5}$; $-\dfrac{3}{5}$ B) $\dfrac{1}{5}$; 1 C) $\dfrac{1}{5}$; $\dfrac{3}{5}$
D) $\dfrac{1}{5}$; $\dfrac{3}{5}$ E) $\dfrac{1}{3}$; $-\dfrac{5}{3}$

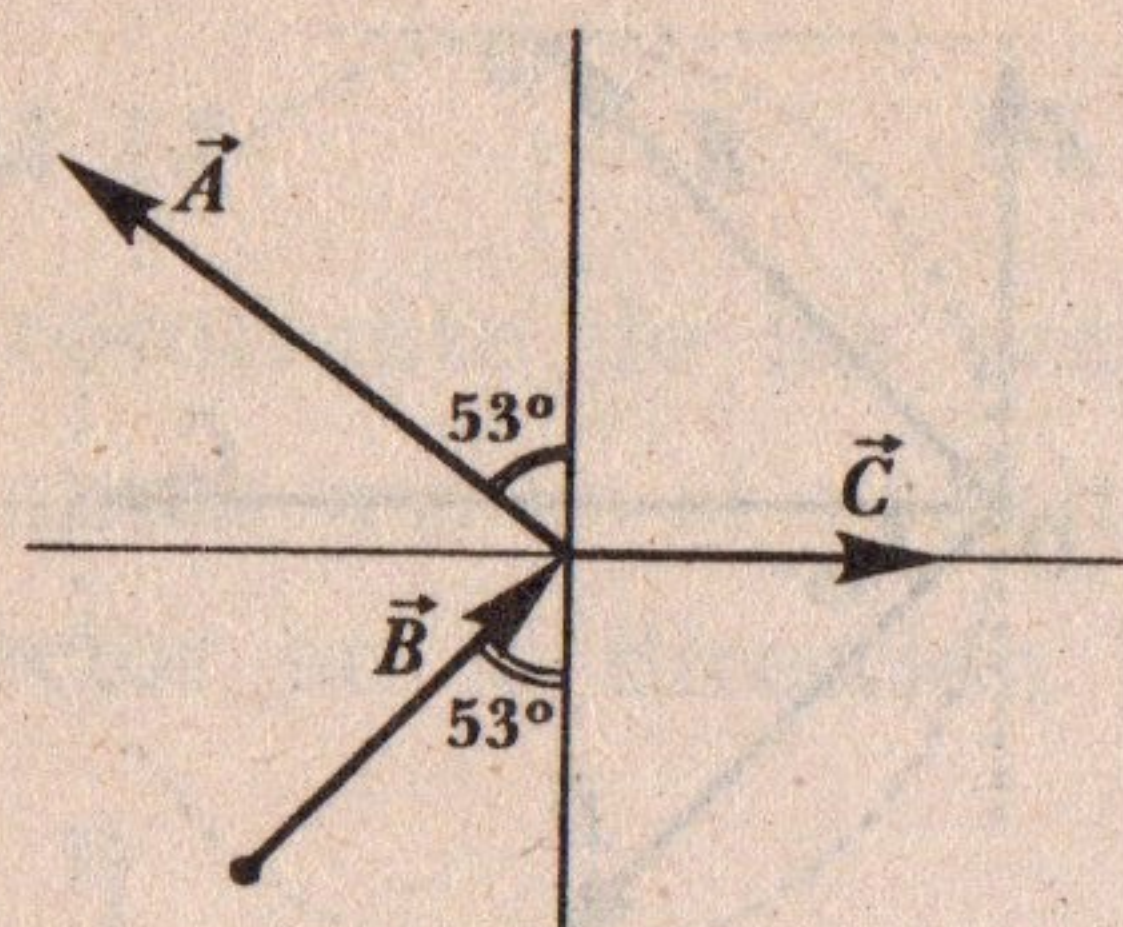
PROBLEMA 26

Cuatro fuerzas $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ actúan sobre una masa colocada en O' como es mostrada en la figura. La fuerza resultante tiene el siguiente módulo y dirección (*respecto de la dirección de C*) :

A) $\sqrt{A+B+C+D}$; arc tg $\left(\dfrac{1}{2}\right)$
B) $(\sqrt{17}/2)\,C$; arc tg $\left(\dfrac{1}{4}\right)$
C) $(\sqrt{5}/2)\,C$; arc tg $\left(\dfrac{1}{2}\right)$
D) $\sqrt{A^2+B^2+C^2+D^2}$; arc tg 0°
E) $(\sqrt{5}/2)\,C$; arc tg 0°

PROBLEMA 27

Hallar el vector unitario de la resultante de vectores

A) $\dfrac{(2\hat{i} + 5\hat{j})}{\sqrt{29}}$ B) $\dfrac{(-2\hat{i} + 5\hat{j})}{\sqrt{29}}$
C) $\dfrac{(5\hat{i} - 2\hat{j})}{\sqrt{29}}$ D) $\dfrac{(3\hat{i} + 4\hat{j})}{5}$
E) $\dfrac{(2\hat{i} + \hat{j})}{\sqrt{5}}$

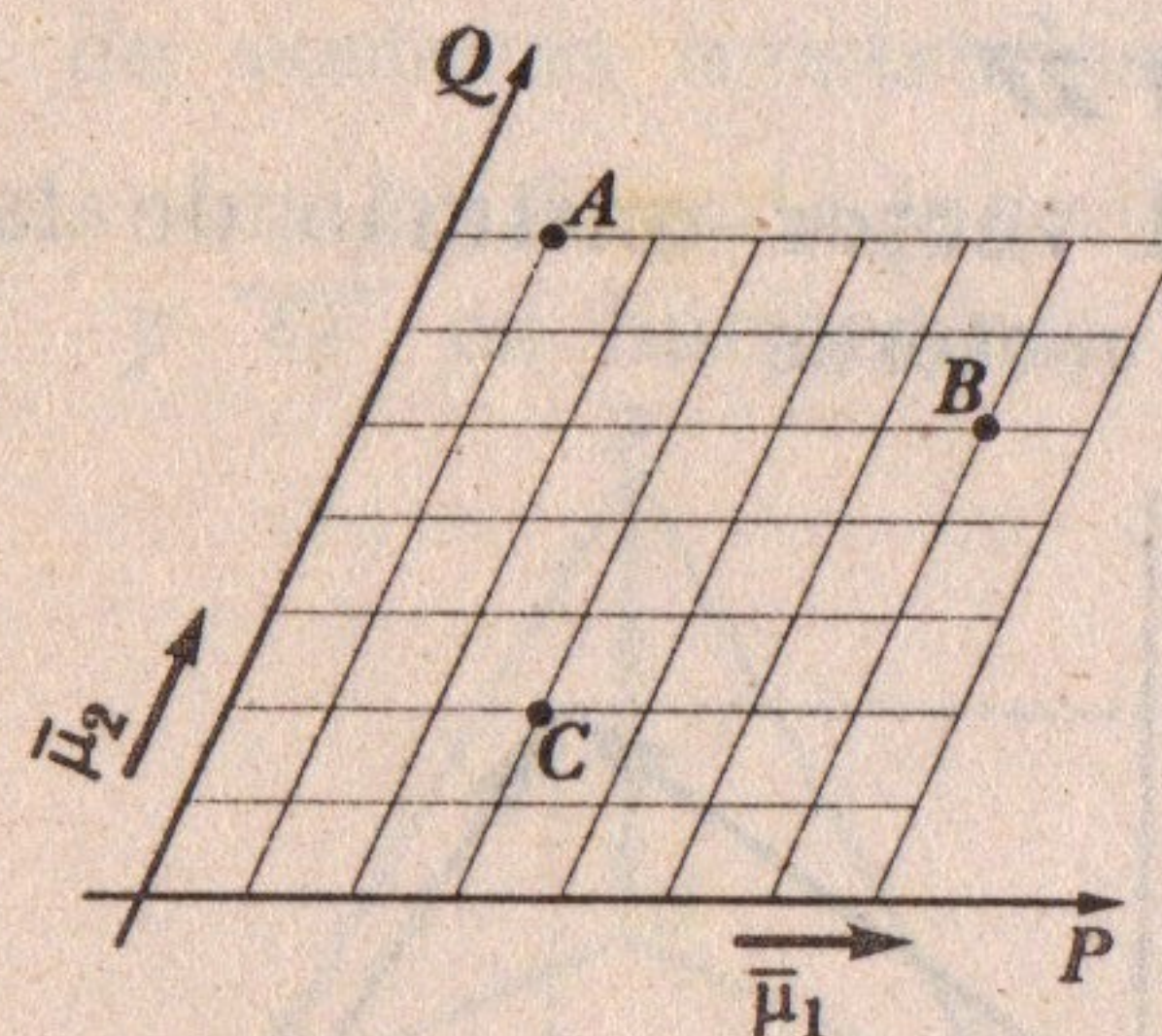
PROBLEMA 28

Hallar el vector unitario del vector $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$, se sabe : $A = 2B = 20$
$C = 16$

A) $(3/5)\hat{i}+(4/5)\hat{j}$ B) $(4/5)\hat{i}-(3/5)\hat{j}$

C) $(-4/5)\hat{i}+(3/5)\hat{j}$ D) $(3/5)\hat{i}-(4/5)\hat{j}$

E) $(\hat{i}-\hat{j})/\sqrt{2}$

PROBLEMA 29

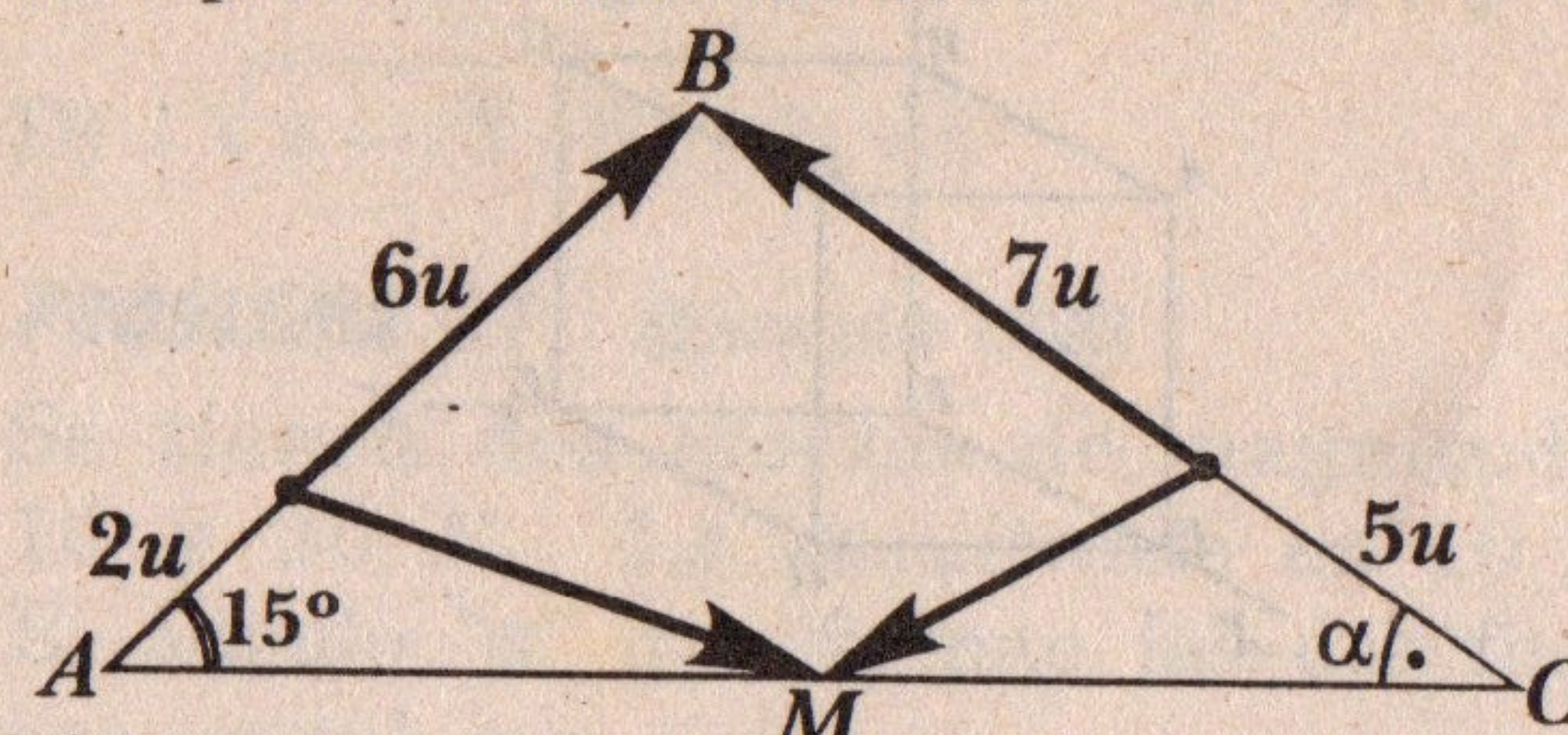
Hallar el vector unitario de $\dfrac{\overline{AC}+\overline{BA}}{2}$. $\vec{\mu}_1$ y $\vec{\mu}_2$ vectores unitarios de los ejes P y Q respectivamente.

A) $\dfrac{(4\bar{\mu}_1-3\bar{\mu}_2)}{5}$ B) $\left(-\dfrac{4}{5}\bar{\mu}_1-\dfrac{3}{5}\bar{\mu}_2\right)$

C) $\left(-\dfrac{4}{5}\bar{\mu}_1+\dfrac{3}{5}\bar{\mu}_2\right)$ D) $\dfrac{(\bar{\mu}_1+\bar{\mu}_2)}{\sqrt{2}}$

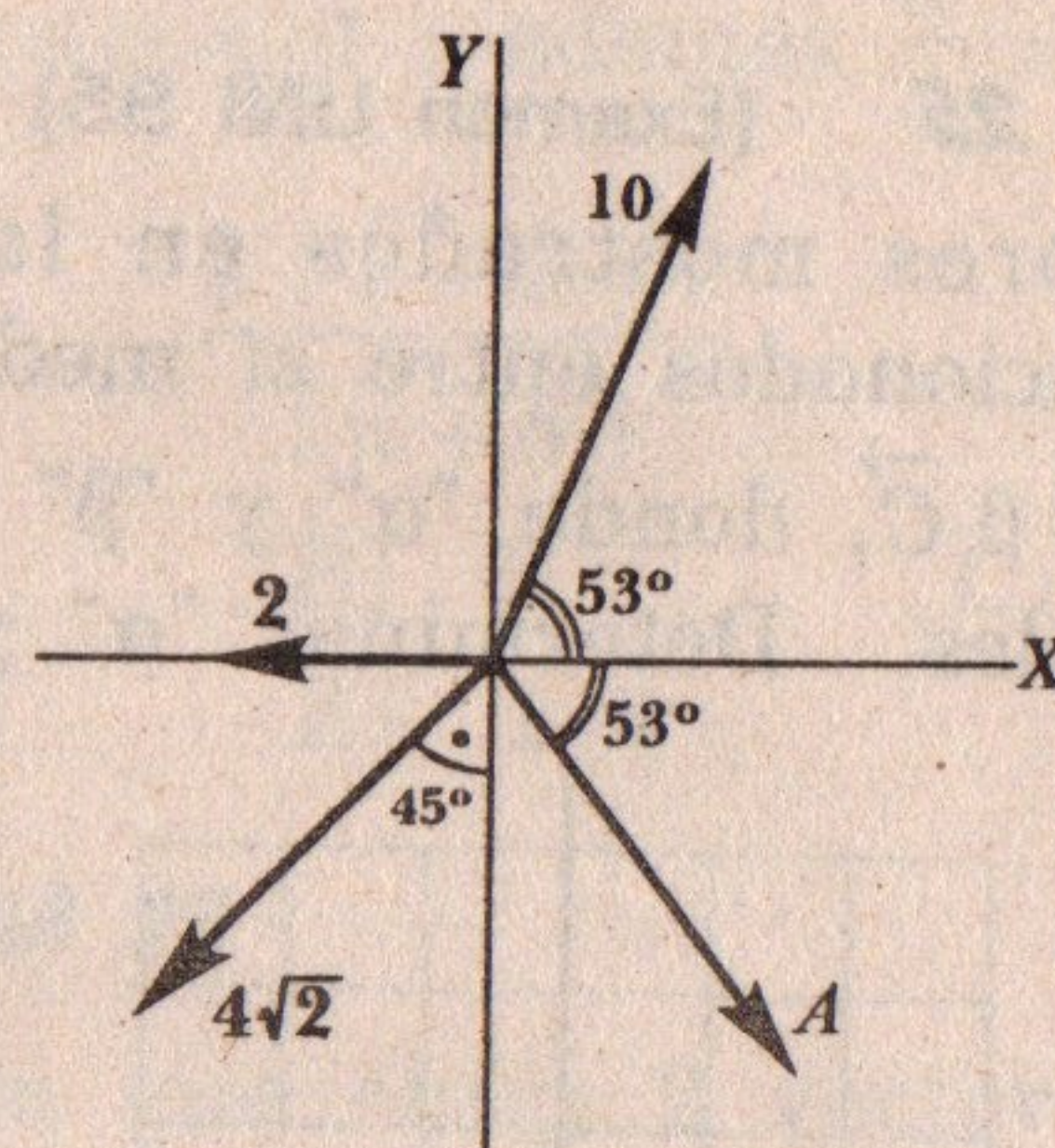
E) $\dfrac{(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)}{\sqrt{2}}$

PROBLEMA 30

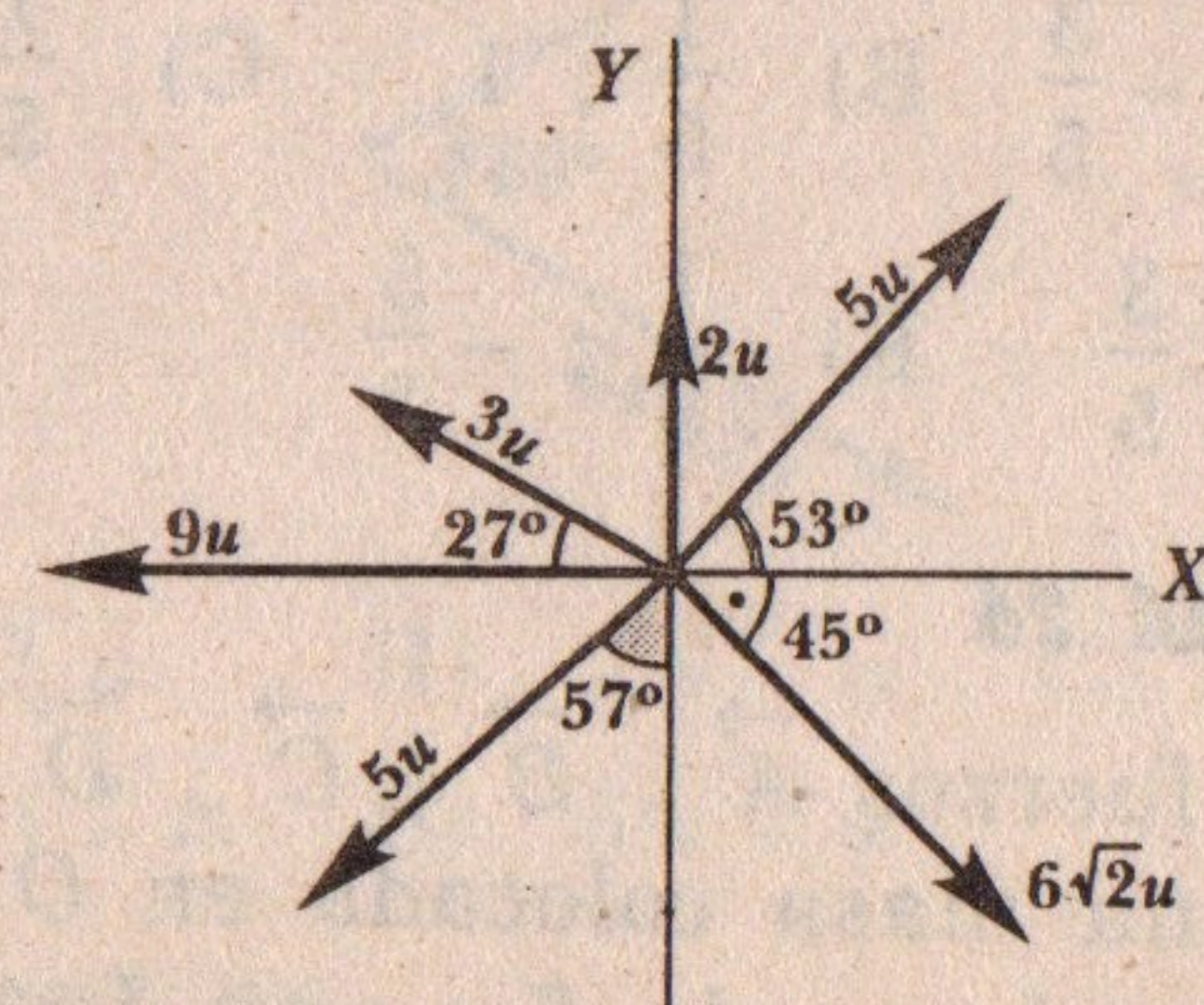
Se muestra un sistema de vectores. Si el módulo de la resultante es $2\sqrt{3}\,u$, hallar el valor de "α" para dicha condición.

M : punto medio de AC.

A) 15° B) 25° C) 35°
D) 45° E) 65°

PROBLEMA 31

Hallar el módulo del vector $\vec{A}$, si la resultante vectorial se encuentra en el eje X.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

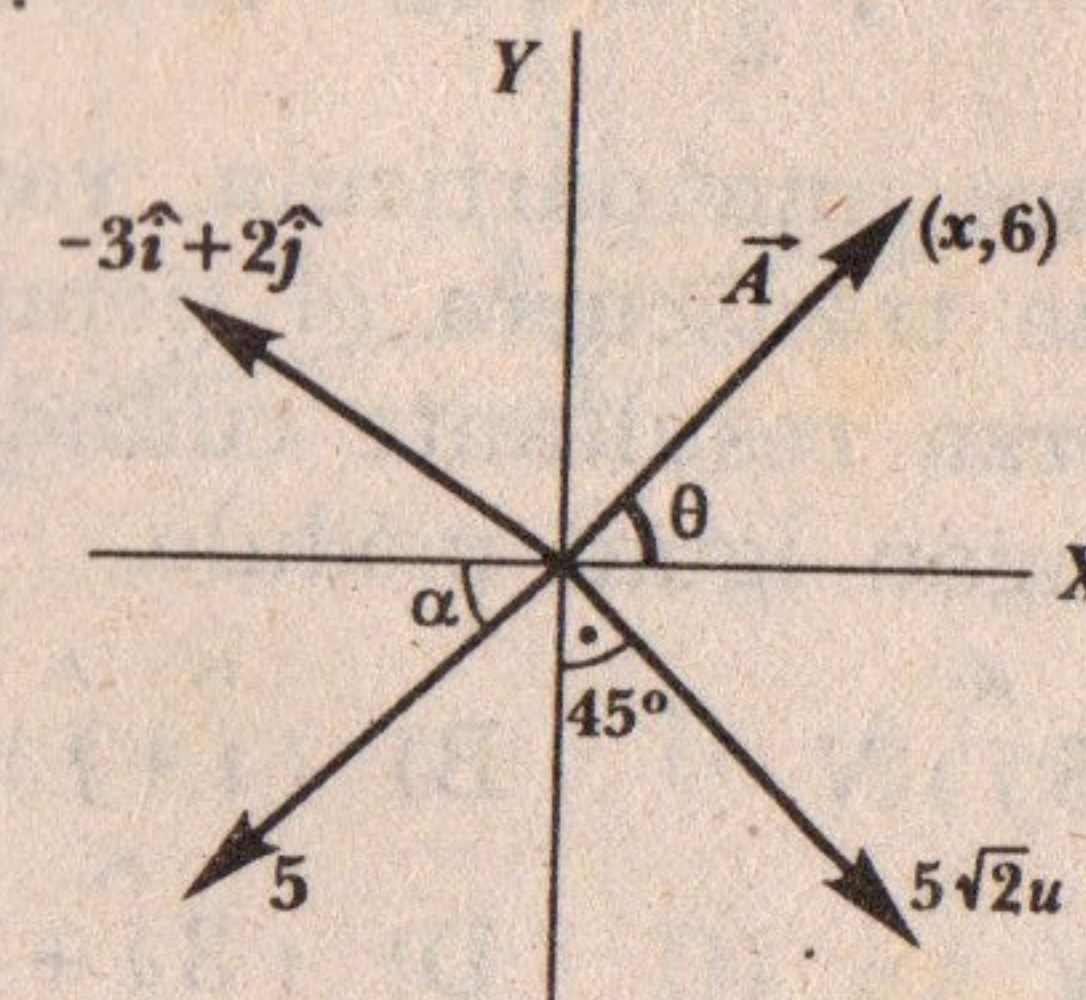
PROBLEMA 32

Hallar el módulo de la resultante del conjunto de vectores mostrados.

A) $4\,u$ B) $49\,u$ C) $4\sqrt{3}\,u$
D) $7\,u$ E) $10\,u$

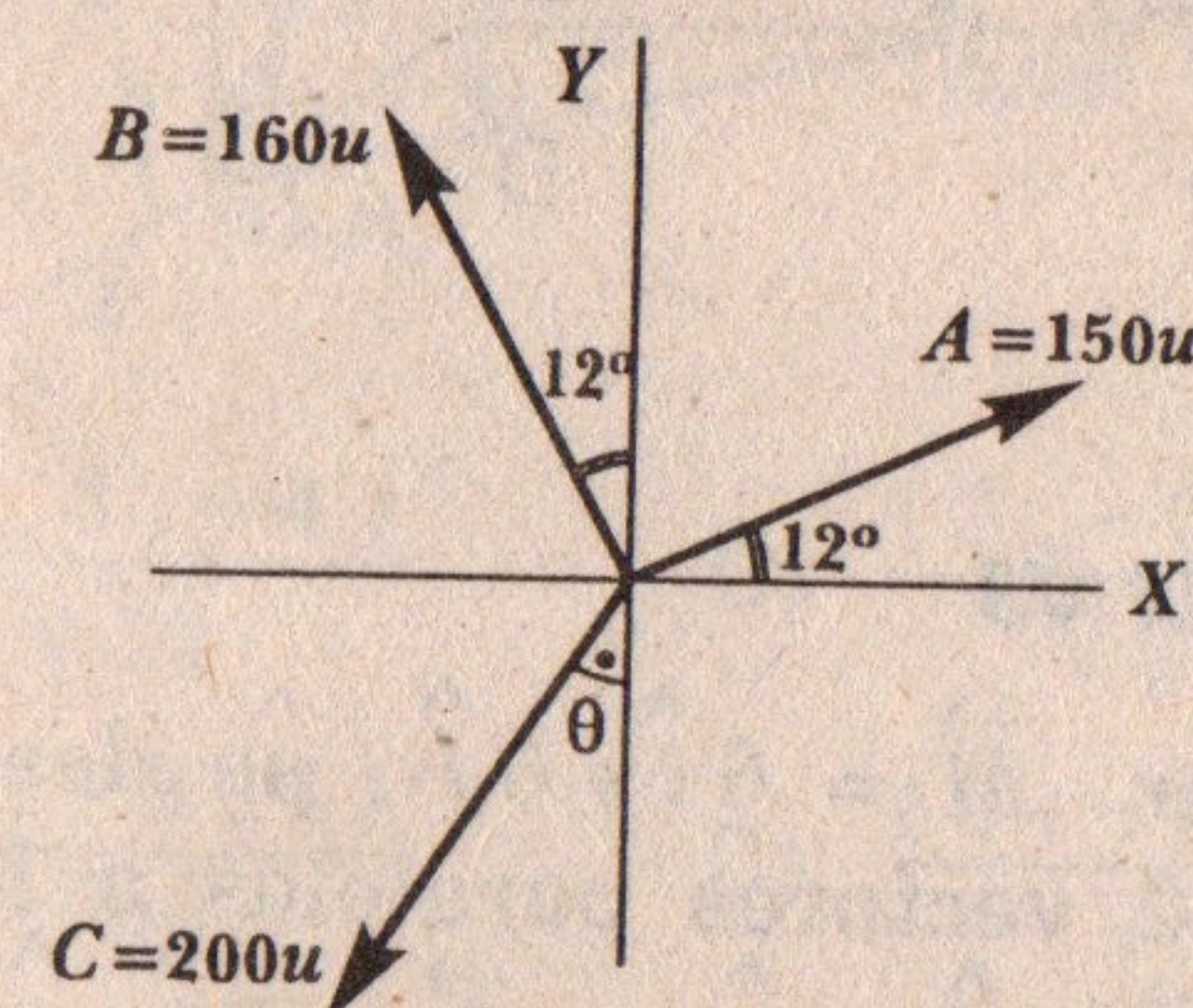
PROBLEMA 33

Si la resultante del sistema de vectores es nula. Halle la dirección del vector $\vec{A}$.

A) $\theta = tg^{-1}(1/3)$ B) $\theta = tg^{-1}(2/3)$

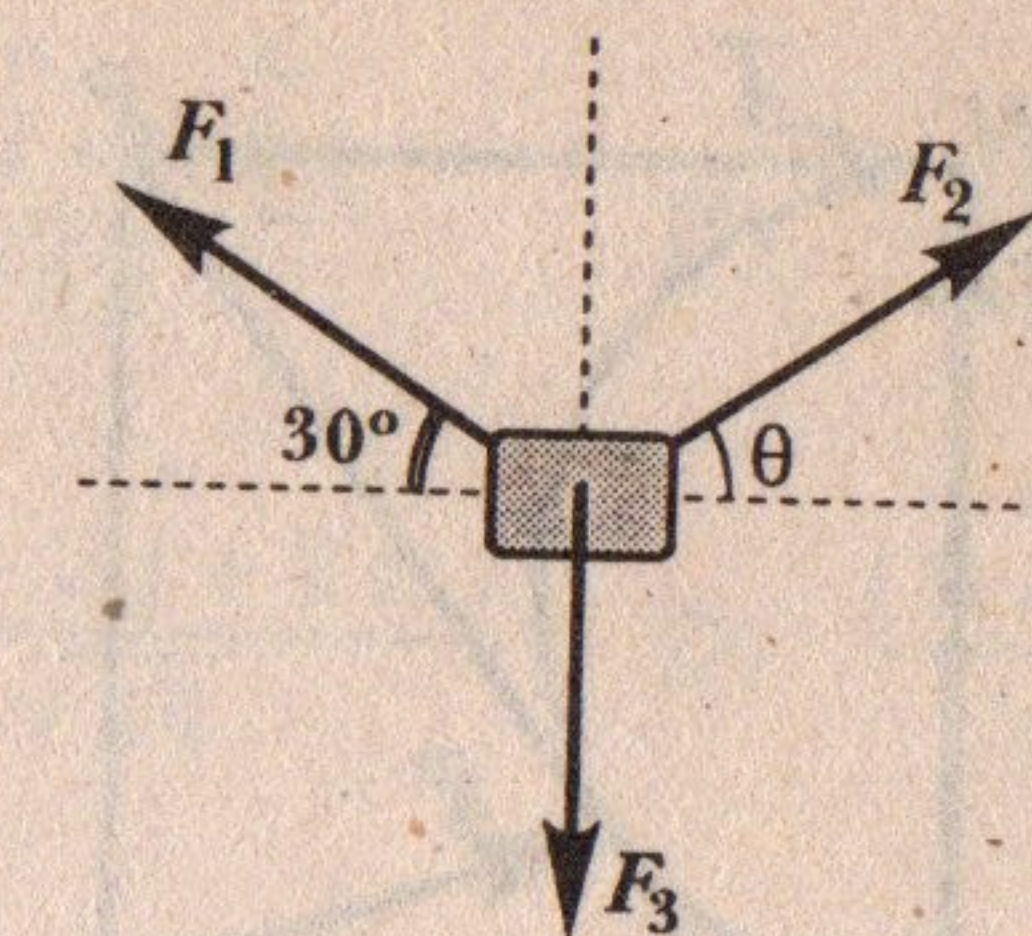
C) $\theta = tg^{-1}(2)$ D) $\theta = tg^{-1}(3)$

E) $\theta = tg^{-1}(3/4)$

PROBLEMA 34

Si la resultante del sistema de vectores se encuentra en la dirección del vector $\vec{A}$. Determine "θ" y el módulo de dicha resultante.

A) 25° ; 30 u B) 25° ; 90 u
C) 37° ; 30 u D) 37° ; 90 u
E) 53° ; 40 u

PROBLEMA 35

Tres fuerzas coplanares $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ y $\bar{F}_3$ jalan un bloque que se encuentran en un plano horizontal.

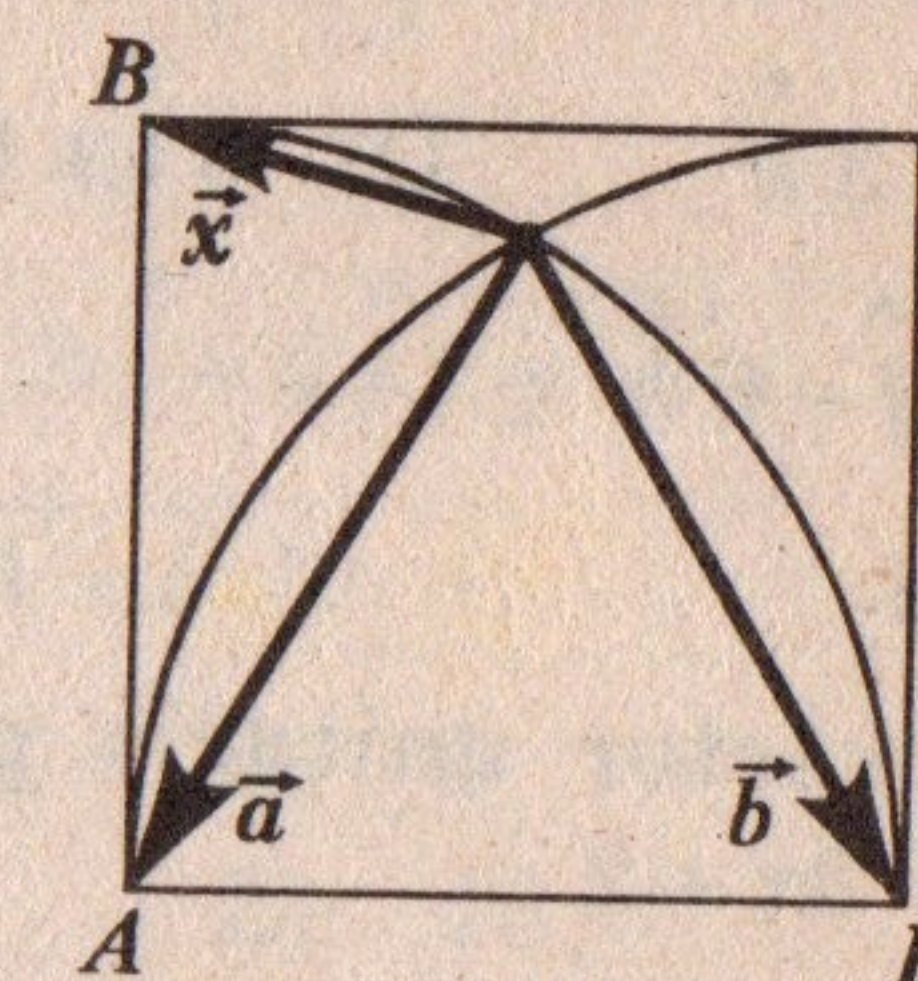
Cual es el mínimo valor de la fuerza F_2, si $F_3 = 50\,N$.

A) $30\,N$ B) $25\,N$
C) $25\sqrt{3}\,N$ D) $30\sqrt{2}\,N$
E) $25\sqrt{2}\,N$

PROBLEMA 36

El vector $\vec{x}$ se expresa según:

$$\vec{x} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}$$

Halle : $k_1 - k_2$

$ABCD$: es un cuadrado y $\overset{\frown}{BMD}$ y $\overset{\frown}{AMC}$: son arcos de circunferencia.

A) $\dfrac{(2\sqrt{3}-3)}{3}$ B) $\dfrac{(3-2\sqrt{3})}{3}$

C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ D) 1

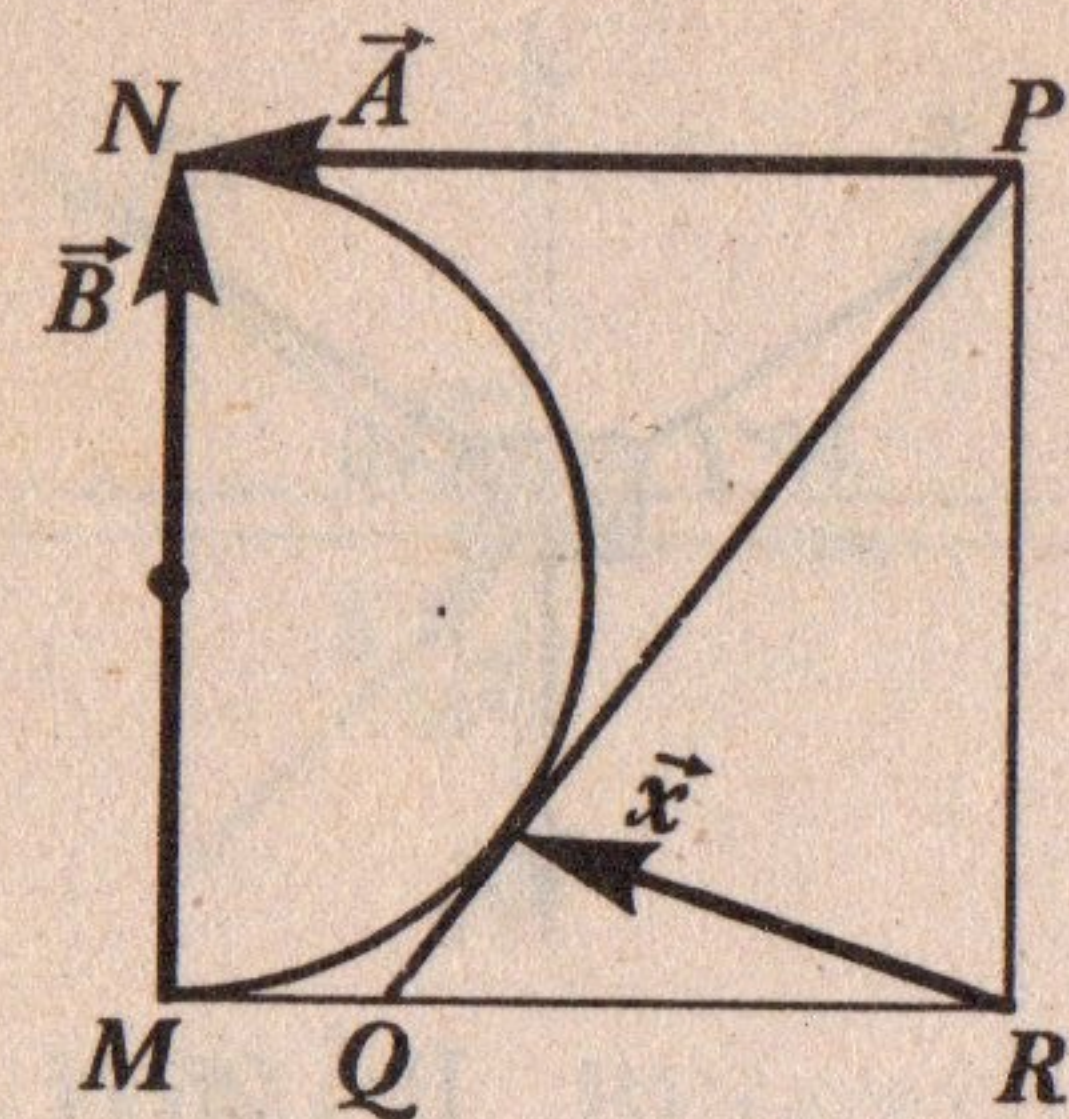
E) 3

PROBLEMA 37

En la figura mostrada, siendo PQ tangente a la semicircunferencia y $MNPR$ un cuadrado, se cumple:

$$\vec{x} = m\vec{A} + n\vec{B}$$

Hallar: $m + 2n$

N A P B x M Q R

A) 1 B) 2 C) 0,2
D) 0,4 E) 0,5

PROBLEMA 38

Hallar un vector de 18 unidades y que sea paralelo al vector $(\vec{A}-\vec{B})$; se sabe que :

$$\vec{A} = 3\hat{i}+5\hat{j}-8\hat{k}$$
$$\vec{B} = \hat{i}+7\hat{j}-7\hat{k}$$

A) $12\hat{i}+12\hat{j}+6\hat{k}$ B) $12\hat{i}-12\hat{j}-6\hat{k}$
C) $6\hat{i}-6\hat{j}-3\hat{k}$ D) $6\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k}$
E) $12\hat{i}+12\hat{j}-6\hat{k}$

PROBLEMA 39

Hallar un vector unitario paralelo a la recta $y = 3x+2$.

A) $(\hat{i}-3\hat{j})/\sqrt{10}$ B) $(\hat{i}+3\hat{j})/\sqrt{10}$
C) $(-\hat{i}+3\hat{j})/\sqrt{10}$ D) $(\hat{i}+2\hat{j})/\sqrt{5}$
E) $(\hat{i}-2\hat{j})/\sqrt{5}$

PROBLEMA 40

Si $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} = 5\hat{i}+2\hat{j}$
$\vec{A}-\vec{B} = 8\hat{i}$
$\vec{B}-\vec{C} = 4\hat{j}$

Hallar : $A^2+B^2+C^2$

A) 60 B) 63 C) 57
D) 51 E) 72

PROBLEMA 41

Dos fuerzas: $\vec{F}_1 = (t-3)\hat{i}N$ y
$\vec{F}_2 = (12-2t)\hat{j}N$

actúan sobre una partícula, variando a medida que transcurre el tiempo. Hallar la fuerza resultante cuando ambas fuerzas tengan igual módulo.

A) $(6\hat{i}+6\hat{j})N$ B) $(\hat{i}+\hat{j})N$
C) $(6\hat{j})N$ D) $(3\hat{i}+3\hat{j})N$
E) $(2\hat{i}+2\hat{j})N$

PROBLEMA 42

Sean los vectores :

$$\vec{A} = (m-1)\hat{i}+2\hat{j}+(m-n)\hat{k}$$
$$\vec{B} = 3\hat{i}+(6-n)\hat{j}$$

Si $\vec{A}//\vec{B}$ y $\vec{A}\neq\vec{B}$; hallar : $\vec{A}-\vec{B}$

A) $2\hat{i}+2\hat{j}$ B) $5\hat{i}+5\hat{j}$
C) $\hat{i}-\hat{j}$ D) $-\hat{i}-\hat{j}$
E) $\hat{i}+\hat{j}$

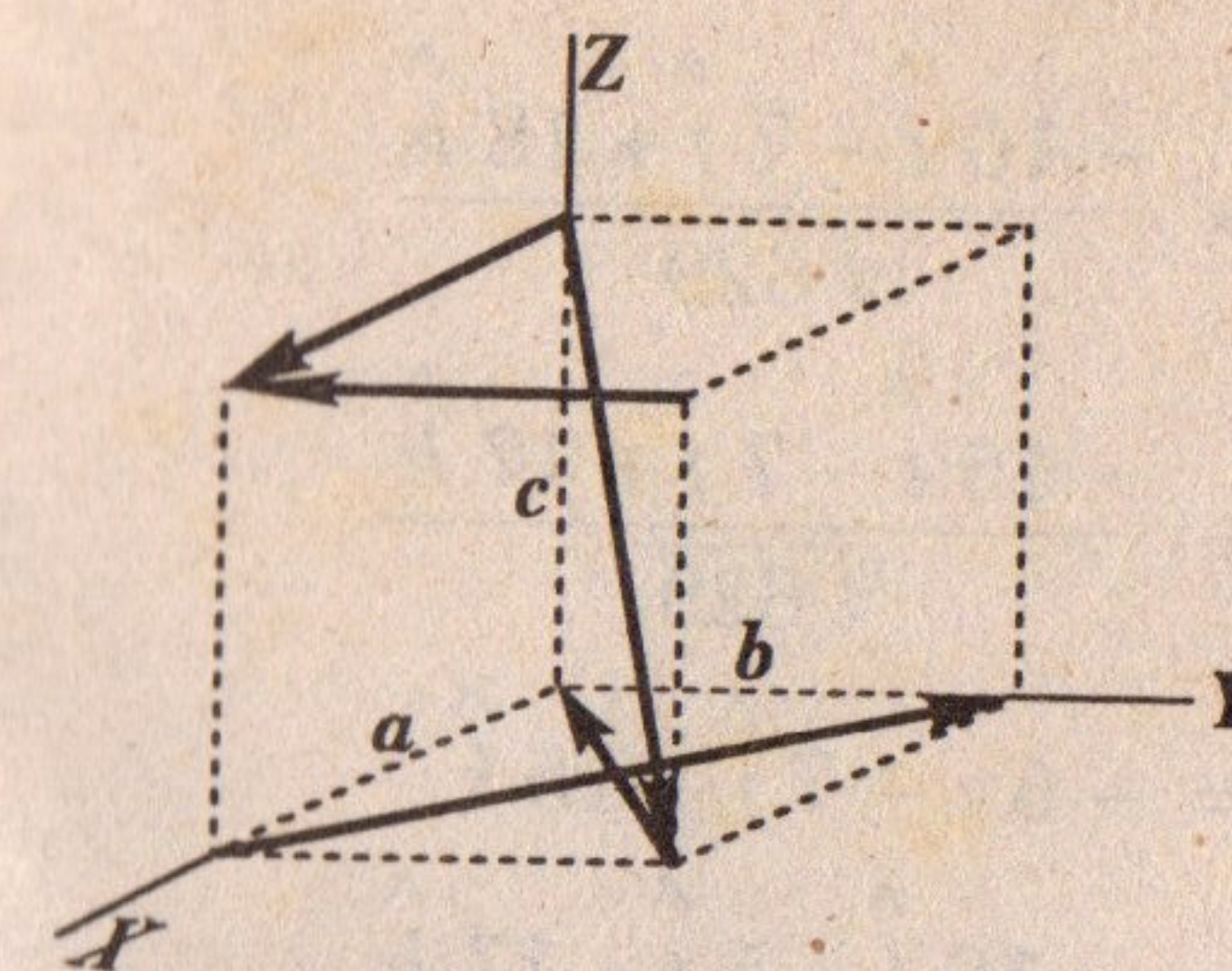
PROBLEMA 43

El vector $\vec{M} = 6\hat{i}+6\hat{j}$, se descompone en 2 vectores paralelos a los vectores: $\vec{A} = \hat{i}+3\hat{j}$ y $\vec{B} = 2\hat{i}-\hat{j}$. Halle la diferencia vectorial de las componentes de $\vec{M}$ en $\vec{A}$ y $\vec{B}$ respectivamente.

A) $9\hat{j}$ B) $10{,}5\hat{j}$ C) $12\hat{j}$
D) $\hat{i}+10{,}5\hat{j}$ E) $5\hat{j}$

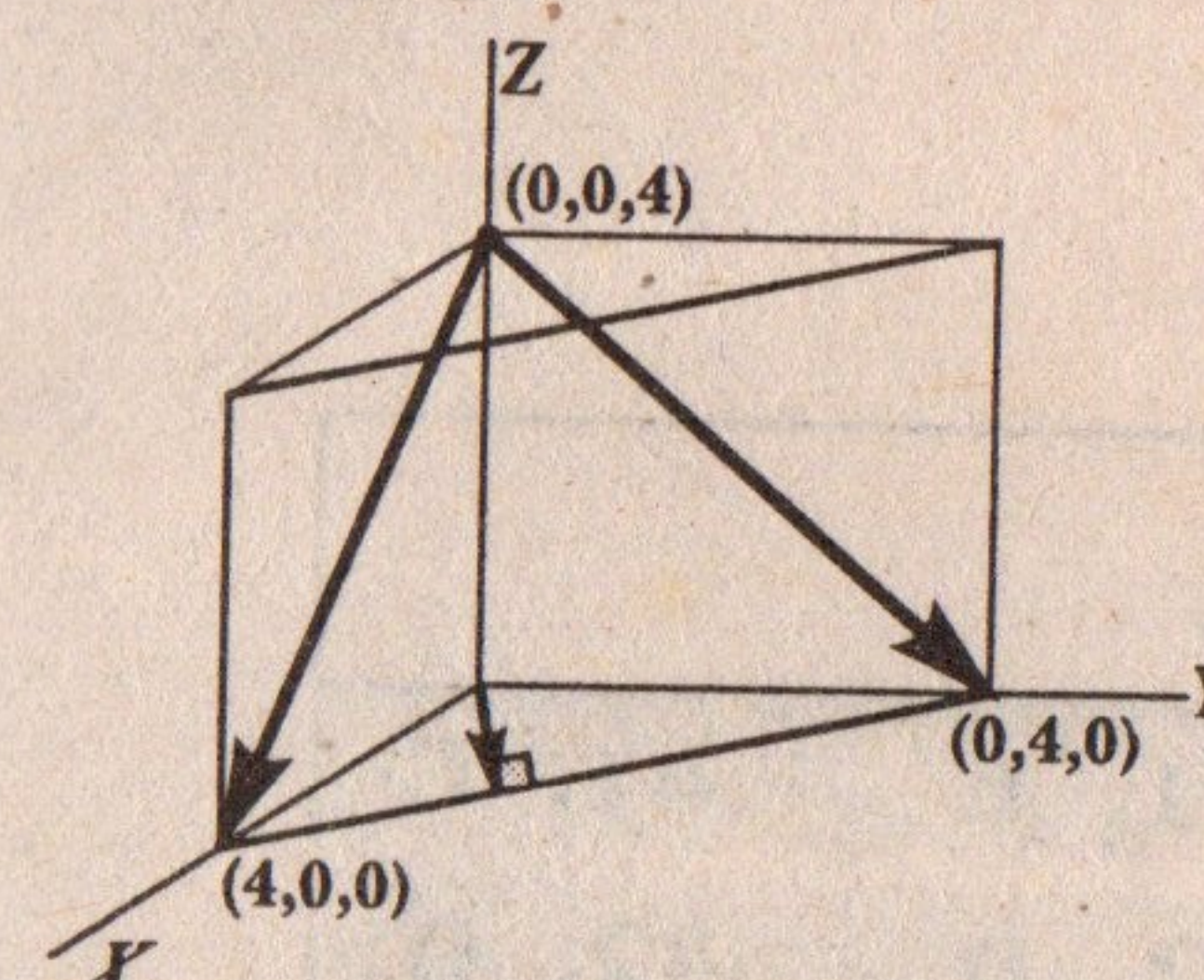
PROBLEMA 44

Hallar la resultante del conjunto de vectores ubicados en las aristas y diagonales del paralelepípedo.

Z c b a Y X

A) $-b\hat{j}-c\hat{k}$ B) $b\hat{j}-c\hat{k}$
C) $-c\hat{k}$ D) $c\hat{k}$
E) $a\hat{i}-c\hat{k}$

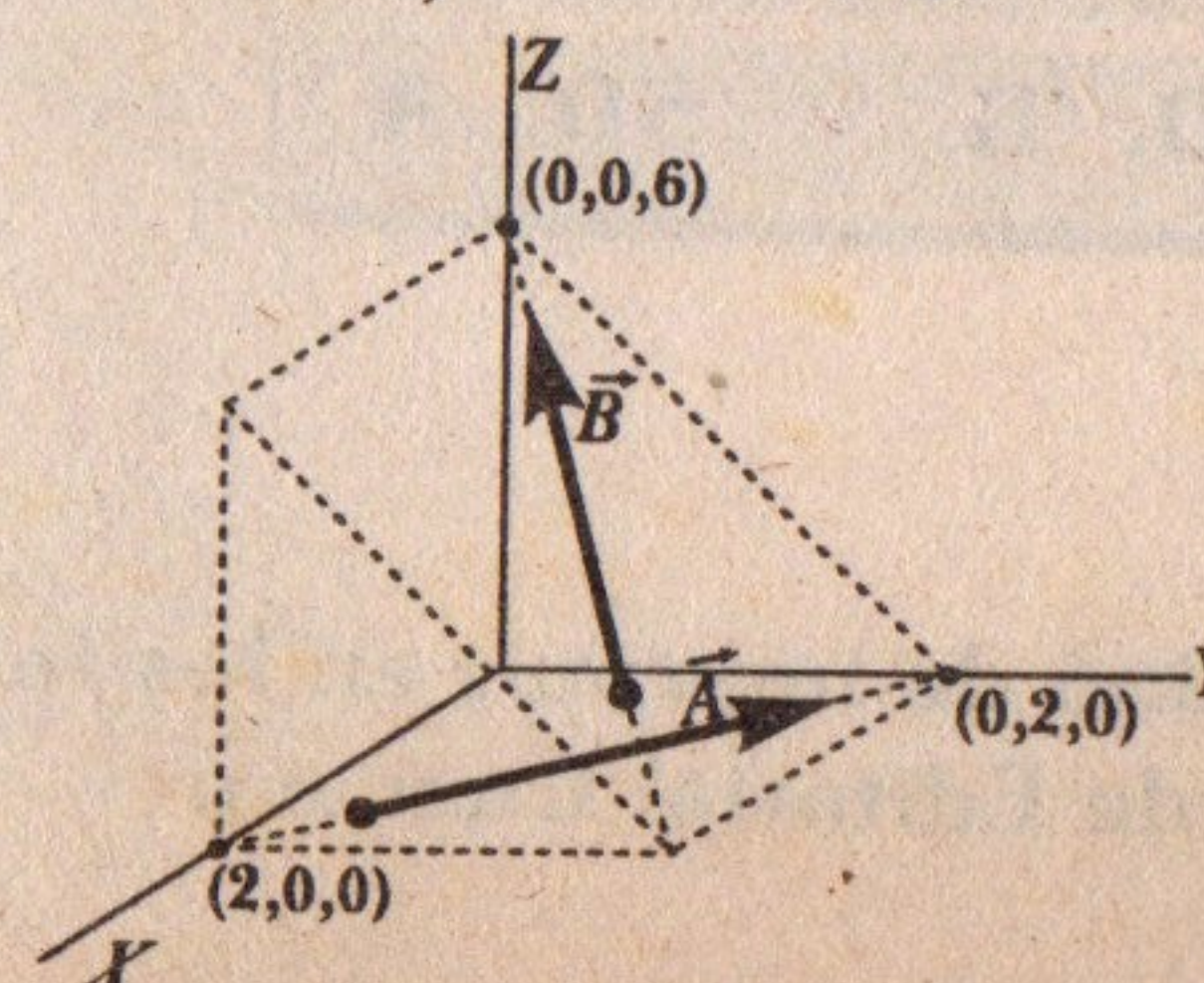
PROBLEMA 45

Hallar el vector unitario de la resultante vectorial.

Z (0,0,4) (0,4,0) Y (4,0,0) X

A) $\frac{(3,3,-4)}{\sqrt{34}}$ B) $\frac{(3,-3,4)}{\sqrt{34}}$
C) $\frac{(2,-3,4)}{\sqrt{29}}$ D) $\frac{(3,-3,-4)}{\sqrt{34}}$
E) $(1,1,-2)/\sqrt{6}$

PROBLEMA 46

Hallar el vector unitario de $\vec{B}-\vec{A}$.
Si $B = \sqrt{11}$; $A = \sqrt{2}$.

Z (0,0,6) B A (0,2,0) Y (2,0,0) X

A) $\frac{(-2\hat{i}+3\hat{k})}{\sqrt{13}}$ B) $\frac{(-2\hat{j}+3\hat{k})}{\sqrt{13}}$
C) $\frac{(-\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})}{\sqrt{14}}$ D) $\frac{(2\hat{j}-3\hat{k})}{\sqrt{13}}$
E) $\hat{k}$

PROBLEMA 47

Sean los vectores : $\vec{A} = (1,2,2)$ y $\vec{B} = 3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$. Hallar el ángulo que forma la diferencia de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ $(\vec{A}-\vec{B})$ con el vector $\vec{A}$.

A) $\theta = \text{arc cos}\left(\frac{4}{9}\right)$ B) $\theta = \text{arc cos}\left(-\frac{4}{9}\right)$
C) $\theta = \text{arc cos}\left(\frac{2}{3}\right)$ D) $\theta = \text{arc cos}\left(-\frac{2}{3}\right)$
E) $\theta = \text{arc cos}\left(\frac{8}{9}\right)$

PROBLEMA 48

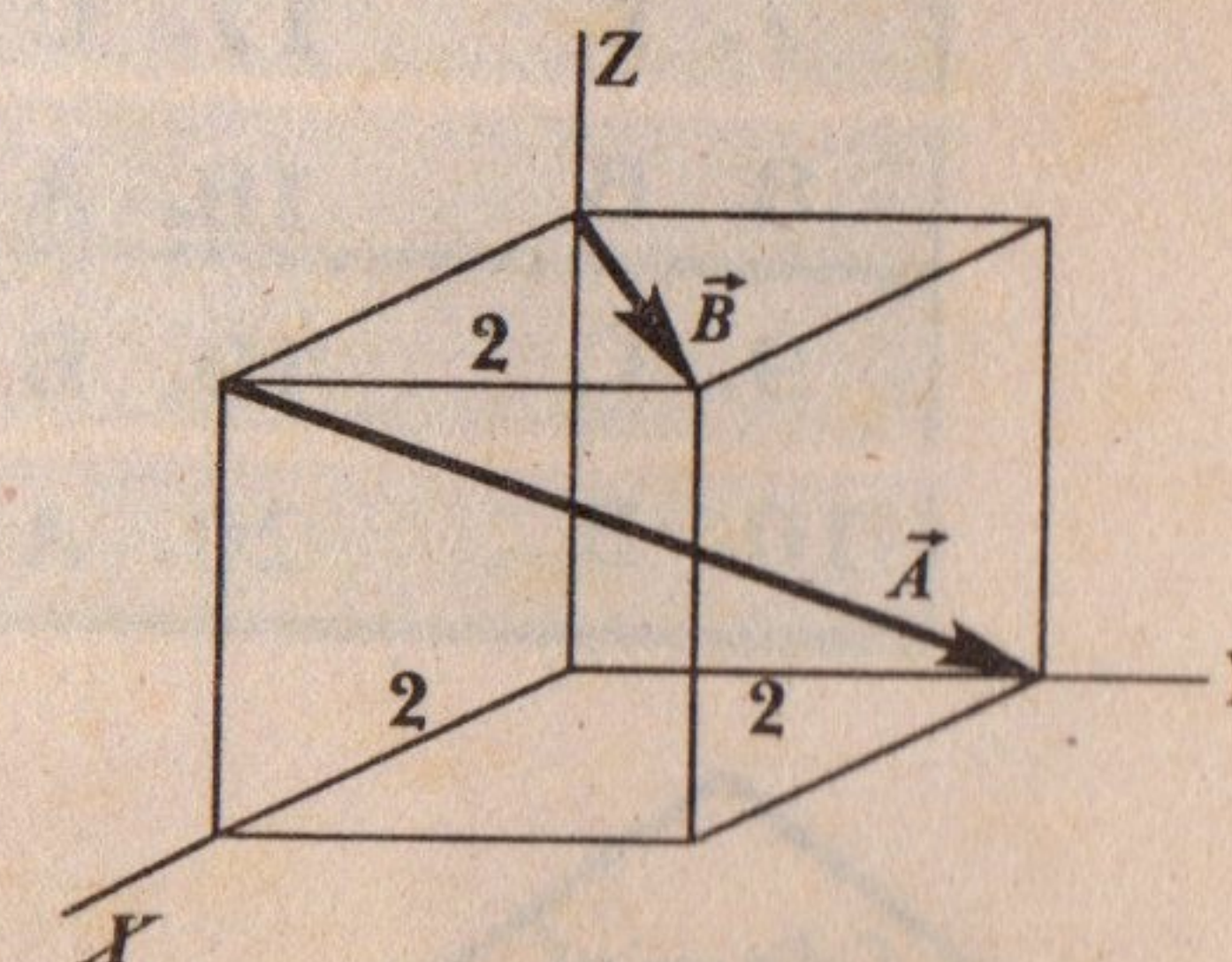
Si $\vec{A} = (3\hat{i}+4\hat{j})$ y $\vec{B} = (-4\hat{i}+3\hat{j})$.

Hallar $|\vec{A}\times\vec{B}|$.

A) 25 B) 0 C) 5
D) 125 E) 16

PROBLEMA 49

Hallar el producto escalar de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$; ubicados en el cubo.

Z 2 B A 2 2 Y X

A) 4 B) 8 C) 10
D) 12 E) 16

PROBLEMA 50

Hallar el vector unitario del vector normal al plano definido por los vectores :

$$\vec{A} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} \qquad \vec{B} = \hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k}$$

Sugerencia: use la definición del producto vectorial.

Si $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$;

$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$; $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

A) $\vec{\mu} = \dfrac{-16\hat{i} - 7\hat{j} + 18\hat{k}}{\sqrt{629}}$

B) $\vec{\mu} = \dfrac{-15\hat{i} - 7\hat{j} + 17\hat{k}}{\sqrt{629}}$

C) $\vec{\mu} = -6\hat{i} - 7\hat{j} + 15\hat{k}$

D) $\vec{\mu} = \dfrac{-16\hat{i} - 5\hat{j} + 17\hat{k}}{\sqrt{629}}$

E) $\vec{\mu} = \dfrac{-17\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}}{\sqrt{32}}$

❖❖❖❖❖

CLAVES

1. B	11. C	21. E	31. E	41. E
2. C	12. B	22. B	32. D	42. D
3. B	13. B	23. B	33. D	43. B
4. D	14. B	24. D	34. A	44. C
5. C	15. D	25. A	35. C	45. A
6. A	16. A	26. B	36. D	46. B
7. E	17. C	27. B	37. B	47. B
8. B	18. A	28. C	38. B	48. A
9. C	19. B	29. B	39. B	49. B
10. B	20. A	30. D	40. B	50. A

Editorial CUZCANO
Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

Esta obra se terminó de imprimir en los talleres gráficos de Editorial Cuzcano